

UNIVERSITÀ DI PISA

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI

Corso di Laurea in Matematica



Tesi di Laurea Specialistica

I GRUPPI DI BRAUER E LA COOMOLOGIA ÉTALE

27 giugno 2008

Relatore:
Chiar.mo Prof.
Angelo Vistoli

Laureando:
Flavia Poma

Anno accademico 2007–2008

INDICE

INTRODUZIONE v

| | | |
|-----|--|----|
| 1 | COOMOLOGIA DI GALOIS | 1 |
| 2 | IL GRUPPO DI BRAUER | 7 |
| 2.1 | Algebre centrali semplici | 8 |
| 2.2 | Definizione e primi esempi | 13 |
| 2.3 | Il gruppo di Brauer relativo | 18 |
| 2.4 | Interpretazione coomologica | 21 |
| 3 | DIMENSIONE COOMOLOGICA | 29 |
| 3.1 | Dimensione coomologica e proprietà C_r | 29 |
| 3.2 | Alcuni risultati classici | 33 |
| 4 | COOMOLOGIA ÉTALE | 39 |
| 4.1 | I morfismi étale | 40 |
| 4.2 | Anelli henseliani | 43 |
| 4.3 | La topologia étale | 46 |
| 4.4 | Prefasci e fasci | 46 |
| 4.5 | Alcuni esempi di fasci | 53 |
| 4.6 | La coomologia étale | 55 |
| 4.7 | Confronto con la coomologia di Galois | 59 |
| 5 | ESEMPI DI GRUPPI DI BRAUER | 63 |
| 5.1 | Campi locali | 63 |
| 5.2 | Campi globali di caratteristica positiva | 68 |
| 5.3 | Il campo $\mathbb{C}(x, y)$ | 79 |
| | BIBLIOGRAFIA | 91 |

INTRODUZIONE

La teoria dei gruppi di Brauer prende il via nel 1929, anno in cui R. Brauer dimostrò che, per ogni campo K , l'insieme delle classi di isomorfismo dei K -corpi di dimensione finita con centro K formano un gruppo abeliano di torsione. Questo gruppo, rivelatosi un importante invariante del campo K , è noto come il gruppo di Brauer di K , e si indica con $\text{Br } K$.

Qualche anno dopo E. Noether mostrò la stretta connessione tra il gruppo di Brauer e la coomologia di Galois. Occorre osservare tuttavia che in quegli anni non era ancora stata elaborata la teoria della coomologia dei gruppi (teoria che si sarebbe sviluppata solo negli anni '40), per cui il linguaggio che E. Noether utilizzava era quello dei prodotti incrociati. Nel frattempo A. A. Albert, R. Brauer, H. Hasse e E. Noether davano una descrizione completa del gruppo di Brauer di un campo di numeri (si vedano Albert [1] e Deuring [10]).

Il punto di vista che vorremo assumere sarà però quello della coomologia étale di uno schema. È possibile infatti mettere in relazione il gruppo di Brauer di un campo K con la coomologia étale dello spettro di K .

La coomologia étale nasce dall'esigenza di estendere costruzioni classiche di topologia algebrica, che funzionano per varietà definite sul campo dei numeri complessi, a campi più generali. L'ostacolo principale a tale estensione è che la topologia di Zariski è troppo grezza: basti pensare ad esempio che la coomologia a coefficienti costanti è quasi sempre nulla.

La definizione di topologia étale è stata data da A. Grothendieck all'inizio degli anni '60, ispirato da un'idea di J.-P. Serre del 1958. Non si tratta di una topologia nel senso classico del termine: gli "aperti" sono morfismi étale (che non sono necessariamente immersioni). Tuttavia la teoria dei fasci e della coomologia si estende in questo nuovo contesto. Inoltre la topologia étale è molto più fine di quella di Zariski, questo permette di ottenere l'estensione di cui si è discusso prima per alcuni fasci: ad esempio per una varietà definita su un campo k si ha che la coomologia étale a coefficienti nel fascio costante $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ coincide con la coomologia singolare, se n è coprime con la caratteristica di k .

D'altra parte se consideriamo lo spettro di un campo K , dal punto di vista topologico questo è semplicemente un punto, per cui la sua topologia di Zariski è banale. Molto più complessa è la topologia étale: in particolare ogni estensione finita e separabile di K corrisponde

a un “aperto”. Si dimostra altresì che la categoria dei fasci étale su K è equivalente alla categoria dei gruppi abeliani discreti con un’azione del gruppo di Galois assoluto di K . Possiamo quindi interpretare la coomologia di Galois di un campo, e di conseguenza il gruppo di Brauer, come un caso particolare della coomologia étale di uno schema.

In questa tesi presentiamo due importanti esempi di calcolo del gruppo di Brauer che sfruttano tale interpretazione.

Nel primo trattiamo i campi globali di caratteristica positiva, seguendo la descrizione di J. Milne in [19, III.2], che usa come strumento essenziale lo studio della coomologia étale della curva corrispondente. Si tenga presente che il gruppo di Brauer di un campo globale era già noto dalla teoria dei corpi di classi (si veda Artin e Tate [2]). Nell’esibire questo esempio, il nostro scopo è perciò quello di introdurre delle tecniche alternative per il calcolo del gruppo di Brauer, applicandole a un caso relativamente semplice. Nello specifico mostriamo il seguente risultato.

TEOREMA. *Sia X una curva algebrica liscia, geometricamente connessa e completa su un campo finito k , e sia K il campo delle funzioni razionali. Allora si ha la successione esatta*

$$0 \rightarrow \text{Br}(K) \rightarrow \bigoplus_{x \in X^{(1)}} \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \xrightarrow{\psi} \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \rightarrow 0,$$

dove $X^{(1)}$ è l’insieme dei punti di X di codimensione 1 e l’omomorfismo ψ è definito da

$$\psi((a_x)_{x \in X^{(1)}}) = \sum_{x \in X^{(1)}} [k(x) : k] a_x.$$

Il secondo esempio, di gran lunga più complesso, è quello del campo $\mathbb{C}(x, y)$ delle funzioni razionali complesse in due variabili. Mentre è immediato osservare che il gruppo di Brauer di un campo algebricamente chiuso è banale ed è noto dalla teoria dei campi e dalla teoria di Galois che $\text{Br}(\mathbb{C}(x)) = 0$, nulla si sapeva fino agli anni ’70 del gruppo di Brauer di $\mathbb{C}(x, y)$. La descrizione di questo gruppo è stata data per la prima volta da M. Artin nel 1972 (Artin e Mumford [4]) e utilizza per l’appunto tecniche di coomologia étale. Il risultato ottenuto da Artin si può riassumere nel seguente teorema.

TEOREMA. Sia $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ il piano proiettivo complesso e \mathbb{G}_m il fascio definito da $\mathbb{G}_m(U) = \Gamma(U, \mathcal{O}_U)^*$. Allora esiste una successione esatta

$$0 \rightarrow H^2(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2, \mathbb{G}_m) \rightarrow \text{Br } \mathbb{C}(x, y) \rightarrow \bigoplus_C H^1(\text{Spec } K_C, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \\ \rightarrow \bigoplus_p \mu^{-1} \rightarrow \mu^{-1} \rightarrow 0,$$

dove la prima somma è su tutte le curve irriducibili C in $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ e la seconda è sui punti chiusi di $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$; inoltre K_C indica il campo delle funzioni razionali della curva C e $\mu^{-1} = \bigcup_n \text{Hom}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$.

NOTAZIONI

Per un campo k indichiamo con k_s una sua chiusura separabile. Se $K \subset L$ è un'estensione di campi, denotiamo con $[L : K]$ il suo grado; se inoltre L/K è di Galois, scriviamo $\text{Gal}(L/K)$ per il gruppo di Galois.

Il simbolo \mathbb{H} denota l'anello dei quaternioni.

Se A è un anello e $n \in \mathbb{N}$, indichiamo con $\mathcal{M}_n(A)$ l'anello delle matrici $n \times n$ a coefficienti in A .

Denotiamo con **Sets** la categoria degli insiemi, e con **Ab** la categoria dei gruppi abeliani.

Per uno schema X , dato un punto $x \in X$ indichiamo con $k(x)$ il campo dei residui di x , e con \bar{x} il punto geometrico di X che ha immagine in x . Se k è un campo e $n \in \mathbb{N}$, il simbolo \mathbb{P}_k^n denota lo spazio proiettivo di dimensione n su k .

COOMOLOGIA DI GALOIS

Dato un gruppo profinito G , definiamo la categoria \mathcal{C}_G i cui oggetti sono i gruppi abeliani considerati con la topologia discreta e sui quali G agisce in modo continuo, che saranno detti G -moduli discreti. Allora \mathcal{C}_G è una categoria abeliana.

Osserviamo che se A è un gruppo abeliano con un'azione di G , lo stabilizzatore di un elemento $a \in A$,

$$\text{Stab}_G(a) = \{ g \in G \mid ga = a \},$$

è un sottogruppo aperto di G per ogni $a \in A$ se e soltanto se A è un G -modulo discreto. Inoltre se H è un sottogruppo aperto di G , poniamo

$$A^H = \{ a \in A \mid ha = a, \text{ per ogni } h \in H \},$$

allora A è un G -modulo discreto se e soltanto se

$$A = \bigcup \left\{ A^H \mid H \text{ sottogruppo aperto di } G \right\}.$$

Sia ora $n \in \mathbb{N}$, indichiamo con G^n il prodotto cartesiano di n copie di G se $n > 0$, e con G^0 l'insieme con un solo elemento $\{\emptyset\}$.

Per ogni $A \in \mathcal{C}_G$, definiamo

$$C^n(G, A) = \{ f: G^n \rightarrow A \mid f \text{ continua} \}.$$

Osserviamo quindi che $C^0(G, A) \cong A$. Inoltre gli insiemi $C^n(G, A)$ sono naturalmente dotati di una struttura di gruppo abeliano.

Vogliamo infine definire per ogni $n \geq 0$ una mappa bordo

$$d: C^n(G, A) \rightarrow C^{n+1}(G, A).$$

Se $f \in C^n(G, A)$, poniamo

$$\begin{aligned} (df)(g_1, \dots, g_{n+1}) &= g_1 f(g_2, \dots, g_{n+1}) \\ &\quad + \sum_{i=1}^n (-1)^i f(g_1, \dots, g_i g_{i+1}, \dots, g_{n+1}) \\ &\quad + (-1)^{n+1} f(g_1, \dots, g_n), \end{aligned}$$

dove $g_1, \dots, g_{n+1} \in G$. Si vede facilmente che d è un omomorfismo di gruppi e che $d^2 = 0$, ossia

$$C^0(G, A) \xrightarrow{d} C^1(G, A) \xrightarrow{d} C^2(G, A) \xrightarrow{d} \dots$$

è un complesso.

A questo punto definiamo l' n -esimo gruppo dei cocicli di G a coefficienti in A

$$Z^n(G, A) = \ker(d: C^n(G, A) \rightarrow C^{n+1}(G, A)),$$

l' n -esimo gruppo dei cobordi di G a coefficienti in A

$$B^n(G, A) = \text{im}(d: C^{n-1}(G, A) \rightarrow C^n(G, A)),$$

e infine l' n -esimo gruppo di coomologia di G a coefficienti in A

$$H^n(G, A) = \frac{Z^n(G, A)}{B^n(G, A)}.$$

PROPOSIZIONE 1.1. *Sia G un gruppo profinito. Valgono i seguenti fatti:*

1. *data una successione esatta corta*

$$0 \rightarrow A' \rightarrow A \rightarrow A'' \rightarrow 0,$$

esistono degli omomorfismi $\delta_n: H^n(G, A) \rightarrow H^{n+1}(G, A)$ tali che la successione lunga ottenuta

$$0 \rightarrow H^0(G, A') \rightarrow H^0(G, A) \rightarrow H^0(G, A'') \xrightarrow{\delta_0} H^1(G, A') \rightarrow \dots$$

è esatta;

2. *per ogni diagramma commutativo*

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & A' & \longrightarrow & A & \longrightarrow & A'' & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & B' & \longrightarrow & B & \longrightarrow & B'' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

il diagramma indotto in coomologia

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 0 & \longrightarrow & H^0(G, A') & \longrightarrow & H^0(G, A) & \longrightarrow & H^0(G, A'') & \longrightarrow & H^1(G, A') & \longrightarrow & \cdots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 0 & \longrightarrow & H^0(G, B') & \longrightarrow & H^0(G, B) & \longrightarrow & H^0(G, B'') & \longrightarrow & H^1(G, B') & \longrightarrow & \cdots
 \end{array}$$

è commutativo.

Dimostrazione. Si tratta di una caccia lungo il diagramma. \square

PROPOSIZIONE 1.2. Siano $\{G_i\}_{i \in I}$ un sistema proiettivo di gruppi profiniti, e $\{A_i\}_{i \in I}$ un sistema induttivo di gruppi abeliani tali che A_i è un G_i -modulo discreto per ogni $i \in I$. Se $G = \varprojlim G_i$ e $A = \varinjlim A_i$, allora

$$H^n(G, A) = \varinjlim H^n(G_i, A_i) \quad \text{per ogni } n \geq 0.$$

Dimostrazione. Si vede facilmente che l'omomorfismo canonico

$$\varinjlim C^n(G_i, A_i) \rightarrow C^n(G, A)$$

è un isomorfismo, e dal momento che

$$\begin{aligned}
 \ker \left(\varinjlim C^n(G_i, A_i) \xrightarrow{d} \varinjlim C^{n+1}(G_i, A_i) \right) \\
 = \varinjlim \ker \left(C^n(G_i, A_i) \xrightarrow{d} C^{n+1}(G_i, A_i) \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{im} \left(\varinjlim C^{n-1}(G_i, A_i) \xrightarrow{d} \varinjlim C^n(G_i, A_i) \right) \\
 = \varinjlim \text{im} \left(C^{n-1}(G_i, A_i) \xrightarrow{d} C^n(G_i, A_i) \right),
 \end{aligned}$$

si ricava la tesi. \square

COROLLARIO 1.3. Dato un G -modulo discreto A , si ha

$$H^n(G, A) = \varinjlim H^n(G/H, A^H) \quad \text{per ogni } n \geq 0,$$

dove il limite è su tutti i sottogruppi aperti H di G .

COROLLARIO 1.4. I gruppi $H^n(G, A)$ sono di torsione per ogni $n \geq 1$.

Dimostrazione. Per il primo corollario basta dimostrare l'enunciato per un gruppo G finito. Supponiamo che G abbia cardinalità m , allora per ogni $g \in G$ si ha $mg = 0$ (stiamo usando la notazione additiva e

scriviamo 0 per l'elemento neutro di G). Sia H un sottogruppo di G di indice h e definiamo l'omomorfismo $N: A^H \rightarrow A^G$ tale che

$$N(a) = \sum_{g \in G/H} ga,$$

per ogni $a \in A^G$. Questa mappa induce degli omomorfismi $H^n(H, A) \rightarrow H^n(G, A)$ per ogni $n \geq 0$. D'altra parte se $r: H^n(G, A) \rightarrow H^n(H, A)$ è la mappa di restrizione, allora $N \circ r = h$, dove h indica la moltiplicazione per h . Basta infatti verificarlo per $n = 0$: se $a \in A^G = H^0(G, A)$, allora

$$N(r(a)) = \sum_{g \in G/H} ga = ha.$$

In particolare se $H = 0$, si ha che la moltiplicazione per m è la mappa nulla, ossia i gruppi $H^n(G, A)$ sono di torsione. \square

PROPOSIZIONE 1.5. *Sia G un gruppo profinito e sia $A \in \mathcal{C}_G$ un gruppo divisibile privo di torsione. Allora*

$$H^n(G, A) = 0 \quad \text{per ogni } n \geq 1.$$

Dimostrazione. Dato $m \in \mathbb{N}$, la moltiplicazione per m

$$m: A \rightarrow A, \quad a \mapsto ma$$

è per ipotesi un isomorfismo, e di conseguenza anche la mappa

$$m: H^n(G, A) \rightarrow H^n(G, A)$$

è un isomorfismo. D'altra parte però i gruppi $H^n(G, A)$ sono di torsione per $n > 0$, e quindi $H^n(G, A) = 0$ per ogni $n > 0$. \square

TEOREMA 1.6. *Sia H un sottogruppo chiuso di G e sia $A \in \mathcal{C}_G$, allora i gruppi $H^q(H, A)$ sono in modo naturale dei G/H -moduli discreti e si ha la successione spettrale*

$$H^p(G/H, H^q(H, A)) \Rightarrow H^{p+q}(G, A).$$

Dimostrazione. Si veda Serre [23, I.2.6]. \square

Per finire, guardiamo più nel dettaglio i primi gruppi di coomologia. Innanzi tutto se identifichiamo $C^0(G, A)$ con A , abbiamo che

$$(da)(g) = ga - a,$$

per ogni $g \in G$ e $a \in A$. Allora

$$Z^0(G, A) = \{ a \in A \mid ga = a \quad \forall g \in G \} = A^G,$$

e quindi

$$H^0(G, A) = A^G,$$

poiché $B^0(G, A) = 0$ per definizione. Sia ora $f \in C^1(G, A)$, allora

$$(df)(g_1, g_2) = g_1 f(g_2) - f(g_1 g_2) + f(g_1).$$

Dunque

$$Z^1(G, A) = \{ f: G \rightarrow A \mid f(g_1 g_2) = g_1 f(g_2) + f(g_1) \};$$

le funzioni $f \in Z^1(G, A)$ sono anche dette omomorfismi incrociati. Osserviamo che se l'azione di G su A è banale, cioè $ga = a$ per ogni $g \in G$ e $a \in A$, allora un omomorfismo incrociato è semplicemente un omomorfismo. Gli elementi di $B^1(G, A)$ sono invece detti omomorfismi incrociati principali e sono della forma $f(g) = ga - a$ per qualche $a \in A$. Allora si vede che se l'azione di G è banale, $B^1(G, A) = 0$ e quindi in questo caso

$$H^1(G, A) = \text{Hom}(G, A) = \{ \text{omomorfismi continui } G \rightarrow A \}.$$

Descriviamo infine anche il secondo gruppo di coomologia. Si ha

$$H^2(G, A) = \frac{Z^2(G, A)}{B^2(G, A)},$$

dove $Z^2(G, A)$ è l'insieme delle funzioni $f: G \times G \rightarrow A$ tali che

$$f(g_1, g_2 g_3) + g_1 f(g_2, g_3) = f(g_1 g_2, g_3) + f(g_1, g_2)$$

e $B^2(G, A)$ è l'insieme delle funzioni $f: G \times G \rightarrow A$ tali che

$$f(g_1, g_2) = g_1 \alpha(g_2) - \alpha(g_1 g_2) + \alpha(g_1)$$

per qualche $\alpha \in C^1(G, A)$.

2

IL GRUPPO DI BRAUER

Il gruppo di Brauer di un campo è un importante invariante che prende il nome dal matematico Richard Brauer, il quale negli anni tra il 1925 e il 1933 sviluppò una teoria sulle algebre di divisione centrali su un fissato campo perfetto e mostrò che le classi di isomorfismo di queste algebre formano un gruppo abeliano di torsione, le cui proprietà si riflettono sulla struttura delle algebre semplici.

Consideriamo ad esempio il campo dei numeri reali. Per calcolarne il gruppo di Brauer occorre innanzi tutto capire quali sono le possibili algebre di divisione su \mathbb{R} , e poi tra queste isolare le algebre che hanno come centro esattamente \mathbb{R} . In questo ci viene in aiuto il seguente teorema.

TEOREMA 2.1 (di Frobenius). *Le uniche algebre di divisione di dimensione finita su \mathbb{R} sono \mathbb{R} , \mathbb{C} e \mathbb{H} (a meno di isomorfismi).*

Dimostrazione. Sia A un'algebra di divisione di dimensione finita su \mathbb{R} , e definiamo

$$A' = \{ u \in A \mid u^2 \in \mathbb{R} \text{ e } u^2 \leq 0 \}.$$

Verifichiamo che A' è un sottospazio di A . È evidente che A' è chiuso rispetto alla moltiplicazione per scalari. Siano $u, v \in A'$ due elementi linearmente indipendenti, vogliamo mostrare che $u + v \in A'$. Se $u = av + b$ con $a, b \in \mathbb{R}$, per ipotesi $u^2 = c < 0$ e $v^2 = d < 0$, allora

$$c = (av + b)^2 = a^2d + 2abv + b^2,$$

da cui si ricava che $ab = 0$, ossia $a = 0$ oppure $b = 0$. Ma se $a = 0$, allora si avrebbe $u \in \mathbb{R}$, il che è assurdo perché $u \neq 0$. Se invece $b = 0$, si violerebbe l'ipotesi di indipendenza lineare di u e v . Quindi $1, u$ e v sono linearmente indipendenti. Consideriamo gli elementi $(u - v)$ e $(u + v)$, questi sono radici di polinomi di secondo grado, per cui esistono $p, q, r, s \in \mathbb{R}$ tali che

$$(u + v)^2 = p(u + v) + q, \quad (u - v)^2 = r(u - v) + s.$$

D'altra parte

$$(u+v)^2 = u^2 + (uv+vu) + v^2, \quad (u-v)^2 = u^2 - (uv+vu) + v^2,$$

allora si ha

$$\begin{aligned} c+d+(uv+vu) &= p(u+v)+q \\ c+d-(uv+vu) &= r(u-v)+s \end{aligned}$$

e sommando membro a membro si ottiene

$$(p+r)u + (p-r)v + (q+s-2c-2d) = 0,$$

ossia $p=r=0$. Allora $(u+v)^2 = q \in \mathbb{R}$, ma $u+v \notin \mathbb{R}$, per cui $q < 0$, cioè $u+v \in A'$.

Mostriamo ora che ogni $u \in A$ si può scrivere nella forma $u = a + y$ con $a \in \mathbb{R}$ e $y \in A'$. Infatti se $u \notin \mathbb{R}$, allora esistono $a, b \in \mathbb{R}$ tali che $u^2 - 2au + b = 0$. Se poniamo $y = u - a$, abbiamo $y^2 = a^2 - b < 0$, perché $4(a^2 - b)$ è il discriminante dell'equazione $x^2 - 2ax + b = 0$ che non ha radici reali. Abbiamo così provato che $A = \mathbb{R} \oplus A'$. Inoltre se $u \in A'$, definiamo $Q(u) = -u^2$. Si verifica facilmente che Q è una forma quadratica definita positiva, che si estende nel modo ovvio ad A . Indichiamo con $\langle u, v \rangle$ il prodotto scalare indotto da Q su A .

Procediamo per assurdo. Se $A \neq \mathbb{R}$ allora $A' \neq 0$, quindi esiste $i \in A'$ tale che $i^2 = -1$. Se $A \neq \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}i = \mathbb{C}$, allora $A' \neq \mathbb{R}i$, per cui esiste $j \in A'$ ortogonale a $\mathbb{R}i$ e tale che $j^2 = -1$. Allora si ha $\langle i, j \rangle = ij + ji = 0$, cioè $ij = -ji$. Se poniamo $k = ij$, si ha che $k^2 = -1$ e $ik + ki = 0 = kj + jk$, quindi $k \in A'$ e k è ortogonale a i e j . Infine se $A \neq \mathbb{H}$, esiste $l \in A'$ ortogonale a i, j e k , tale che $l^2 = -1$. Allora $li = -il, lj = -jl$ e $lk = -kl$. Ma d'altra parte

$$lk = l(ij) = (li)j = -(il)j = -i(lj) = i(jl) = (ij)l = kl,$$

il che è assurdo. □

Osserviamo subito che \mathbb{C} , essendo un campo, non può avere come centro \mathbb{R} . Restano quindi \mathbb{R} e \mathbb{H} . In effetti il gruppo di Brauer di \mathbb{R} è costituito dalle classi di isomorfismo di questi due elementi ed è perciò ciclico di ordine 2. Inoltre vedremo che \mathbb{R} giocherà il ruolo dell'elemento neutro.

2.1 ALGEBRE CENTRALI SEMPLICI

DEFINIZIONE 2.1.1. Sia A un anello con 1. Si dice che A è un *anello semplice* se non ha ideali bilateri propri non nulli.

DEFINIZIONE 2.1.2. Sia K un campo. Una K -algebra centrale semplice è un'algebra associativa A di dimensione finita su K , che è un anello semplice e il cui centro è esattamente K .

Vi è un importante risultato che fornisce una caratterizzazione più pratica degli anelli semplici.

TEOREMA 2.1.3 (di Wedderburn). *Una K -algebra A è una K -algebra centrale semplice se e soltanto se esiste un corpo D (unico a meno di isomorfismi) ed esiste un unico $n \in \mathbb{N}$ tali che $A \cong \mathcal{M}_n(D)$. Inoltre se D ed E sono corpi e $\mathcal{M}_n(D) \cong \mathcal{M}_m(E)$, allora $m = n$ e $D \cong E$.*

Dimostrazione. Sia A una K -algebra centrale semplice. Consideriamo la mappa $L: A \rightarrow \text{End}_A(A)$, dove $\text{End}_A(A)$ indica gli endomorfismi di A come A -modulo destro. L'applicazione L manda un elemento $a \in A$ nella moltiplicazione a sinistra per a . Si verifica facilmente che L è un isomorfismo di anelli.

Inoltre se $\mathfrak{r} \subset A$ è un A -sottomodulo destro semplice di A , allora $\sum_{a \in A} a\mathfrak{r}$ è un ideale bilatero non nullo di A . Dal momento che A è semplice, si ha

$$A = \sum_{a \in A} a\mathfrak{r} = \sum_{j=1}^n a_j \mathfrak{r},$$

per un n minimo. Consideriamo allora la mappa

$$f: \bigoplus_{j=1}^n \mathfrak{r} \rightarrow A$$

definita da

$$f(r_1, \dots, r_n) = \sum_{j=1}^n a_j r_j.$$

Vediamo subito che f è un omomorfismo di A -moduli destri suriettivo. Supponiamo che $f(r_1, \dots, r_n) = 0$. Se esiste un indice i tale che $r_i \neq 0$, supponiamo per semplicità $i = 1$, allora

$$\sum_{i=1}^n a_i r_i = 0,$$

da cui si ricava

$$a_1 r_1 = - \sum_{i=2}^n a_i r_i.$$

Osserviamo che $r_1\tau$ è un sottomodulo non nullo di τ , per cui $r_1\tau = \tau$. Di conseguenza per ogni $r \in \tau$ esiste $r' \in \tau$ tale che $r = r_1r'$ e

$$a_1r = a_1r_1r' = - \sum_{i=2}^n a_i r_i r',$$

il che contraddice la minimalità di n . Ne consegue che f è un isomorfismo di A -moduli destri.

Infine vogliamo mostrare che $\text{End}_A \left(\bigoplus_{j=1}^n \tau \right) \cong \mathcal{M}_n(\text{End}_A \tau)$. Per fare questo consideriamo le proiezioni $\pi_j: \bigoplus_{h=1}^n \tau \rightarrow \tau$ e le inclusioni $i_j: \tau \rightarrow \bigoplus_{h=1}^n \tau$. Definiamo due omomorfismi di anelli

$$\begin{aligned} \alpha: \text{End}_A \left(\bigoplus_{j=1}^n \tau \right) &\longrightarrow \mathcal{M}_n(\text{End}_A \tau) \\ \phi &\longmapsto (\pi_j \phi i_h)_{j,h=1,\dots,n} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \beta: \mathcal{M}_n(\text{End}_A \tau) &\longrightarrow \text{End}_A \left(\bigoplus_{j=1}^n \tau \right) \\ (\phi_{j,h})_{j,h=1,\dots,n} &\longmapsto \sum_{j,h=1}^n i_j \phi_{j,h} \pi_h. \end{aligned}$$

Si verifica che $\alpha\beta = \text{id}$ e $\beta\alpha = \text{id}$. Allora

$$A \cong \text{End}_A A \cong \text{End}_A \left(\bigoplus_{j=1}^n \tau \right) \cong \mathcal{M}_n(\text{End}_A \tau).$$

E si conclude osservando che $\text{End}_A \tau$ è un anello di divisione: infatti se $\phi \in \text{End}_A \tau$ è un elemento non nullo, allora $\text{im } \phi \neq 0$ e $\text{ker } \phi \neq \tau$; d'altra parte $\text{im } \phi$ e $\text{ker } \phi$ sono sottomoduli di τ , quindi si deve avere $\text{im } \phi = \tau$ e $\text{ker } \phi = 0$, cioè ϕ è invertibile in $\text{End}_A \tau$.

Viceversa mostriamo che se D è un K -corpo allora $\mathcal{M}_n(D)$ è una K -algebra centrale semplice. Sia $I \subset \mathcal{M}_n(D)$ un ideale bilatero non nullo e sia $a = (a_{i,j})_{i,j=1,\dots,n} \in I$ un elemento diverso da zero, allora esiste un coefficiente $a_{i,j} \neq 0$. Indichiamo con $E_{i,j}$ la matrice i cui elementi sono tutti zero tranne quello in posizione (i,j) che è uguale a 1. Allora

$$E_{r,r} = a_{i,j}^{-1} E_{r,i} a E_{j,r} \in I, \quad \text{per ogni } r = 1, \dots, n,$$

per cui si ha anche $1 = \sum_{r=1}^n E_{r,r} \in I$, cioè $I = \mathcal{M}_n(D)$.

Infine supponiamo che $\mathcal{M}_n(D) \cong \mathcal{M}_m(E)$. Osserviamo che $E_{1,1}\mathcal{M}_n(D)E_{1,1} \cong D$, e possiamo quindi definire la mappa

$$\begin{aligned} D &\cong E_{1,1}\mathcal{M}_n(D)E_{1,1} \longrightarrow \text{End}_{\mathcal{M}_n(D)}(E_{1,1}\mathcal{M}_n(D)) \\ E_{1,1}ME_{1,1} &\longmapsto L_{E_{1,1}ME_{1,1}} \end{aligned}$$

dove $M \in \mathcal{M}_n(D)$, e $L_{E_{1,1}ME_{1,1}}$ indica la moltiplicazione a sinistra per $E_{1,1}ME_{1,1}$. Si verifica facilmente che questo è un isomorfismo, per cui si ha

$$D \cong \text{End}_{\mathcal{M}_n(D)}(E_{1,1}\mathcal{M}_n(D)) \cong \text{End}_{\mathcal{M}_m(E)}(E_{1,1}\mathcal{M}_m(E)) \cong E,$$

e per motivi di dimensione $m = n$. \square

Con le notazioni del teorema, diremo che D è la *componente corpo* di A . Vediamo di seguito alcune proprietà delle algebre centrali semplici.

PROPOSIZIONE 2.1.4. *Se A e B sono K -algebre centrali semplici, anche $A \otimes_K B$ è una K -algebra centrale semplice.*

Dimostrazione. Sia $I \subset A \otimes_K B$ un ideale bilatero non nullo. Scegliamo $u \in I$, $u \neq 0$, che ammette una scrittura della forma

$$u = \sum_{i=1}^n a_i \otimes b_i,$$

con i b_i linearmente indipendenti e n minimo (diremo che u ha lunghezza minima). Poiché $u \neq 0$ esiste un indice i per cui $a_i \neq 0$; supponiamo per semplicità $a_1 \neq 0$. Se $r, s \in A$, allora

$$(r \otimes 1)u(s \otimes 1) = \sum_{i=1}^n ra_i s \otimes b_i \in I.$$

Dal momento che A è semplice $Aa_iA = A$, per cui esistono $r_j, s_j \in A$ con $j = 1, \dots, h$, tali che $\sum_{j=1}^h r_j a_1 s_j = 1$ e

$$\sum_j (r_j \otimes 1)u(s_j \otimes 1) = \sum_{i=1}^n \left(\sum_j r_j a_i s_j \right) \otimes b_i \in I.$$

Perciò possiamo supporre senza perdita di generalità che

$$u = 1 \otimes b_1 + a_2 \otimes b_2 + \dots + a_n \otimes b_n.$$

Dato $a \in A$, si ha $(a \otimes 1)u - u(a \otimes 1) \in I$, cioè

$$v = (a_2 a - a a_2) \otimes b_2 + \dots + (a_n a - a a_n) \otimes b_n \in I.$$

Ma v ha lunghezza minore di u , quindi per minimalità v deve essere nullo. D'altra parte i b_i sono linearmente indipendenti su K , allora $1 \otimes b_i$ sono linearmente indipendenti su $A \otimes 1$, per cui $a_i a - a a_i = 0$ per $i = 2, \dots, n$ e per ogni $a \in A$, cioè $a_i \in K$ per $i = 2, \dots, n$. Allora possiamo scrivere

$$u = 1 \otimes (b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n) = 1 \otimes b$$

e $b \neq 0$ per la condizione di indipendenza lineare sui b_i . Inoltre B è semplice e

$$1 \otimes B = 1 \otimes B b B = (1 \otimes B) u (1 \otimes B) \subset I,$$

da cui $A \otimes B = (A \otimes 1)(1 \otimes B) \subset I$, cioè $I = A \otimes B$.

Abbiamo così mostrato che $A \otimes_K B$ è semplice. Resta da provare che il centro di $A \otimes_K B$ è esattamente K . È ovvio che K è contenuto nel centro di $A \otimes_K B$. Sia $z = \sum_{i=1}^n a_i \otimes b_i$ un elemento del centro di $A \otimes_K B$ con i b_i linearmente indipendenti su K . Dato $a \in A$, si ha

$$0 = (a \otimes 1)z - z(a \otimes 1) = \sum_{i=1}^n (a a_i - a_i a) \otimes b_i,$$

allora come prima $a a_i - a_i a = 0$ per ogni i , cioè $a_i \in K$ e quindi $z = 1 \otimes \sum_{i=1}^n a_i b_i = 1 \otimes b$. Inoltre per ogni $b' \in B$ si ha

$$0 = z(1 \otimes b') - (1 \otimes b')z = 1 \otimes (b b' - b' b),$$

da cui si ricava $b \in K$, ossia $z = b(1 \otimes 1) \in K(1 \otimes 1) \cong K$. \square

PROPOSIZIONE 2.1.5. *Sia A una K -algebra centrale semplice. Valgono i seguenti fatti:*

1. *se $k \subset L$ è un'estensione di campi, allora $A \otimes_K L$ è una L -algebra centrale semplice;*
2. *se \bar{K} è una chiusura algebrica di K , allora $A \otimes_K \bar{K} \cong \mathcal{M}_n(\bar{K})$ e $\dim_K A = n^2$, n è detto il grado ridotto di A .*

Dimostrazione. Se $I \subset A \otimes_K L$ è un ideale bilatero non nullo e $u \in I$, $u \neq 0$ è un elemento di lunghezza minima, $u = \sum_{i=1}^n a_i \otimes l_i$ con l_i linearmente indipendenti, si può supporre che $a_1 = 1$ (come nella dimostrazione precedente). Allora dato $a \in A$,

$$v = (a \otimes 1)u - u(a \otimes 1) \in I,$$

ma v ha lunghezza minore di u , quindi $v = 0$. Di conseguenza

$$a_i a - a a_i = 0$$

per $i = 2, \dots, n$, cioè $a_i \in K$ per ogni i . Perciò possiamo scrivere $u = 1 \otimes (\sum_{i=1}^n a_i l_i) = 1 \otimes l$, con $l \neq 0, l \in L$. Inoltre

$$1 \otimes L = 1 \otimes LIL = (1 \otimes L)u(1 \otimes L) \subset I,$$

per cui $A \otimes L = (A \otimes 1)(1 \otimes L) \subset I$.

Mostriamo ora che $A \otimes_K L$ è una L -algebra, il cui centro è L . Dato $l \in L$, definiamo

$$l \left(\sum_{i=1}^n a_i \otimes l_i \right) = \sum_{i=1}^n a_i \otimes ll_i.$$

Con questa operazione $A \otimes_K L$ è un L -modulo finitamente generato, cioè una L -algebra finita. È evidente che L è contenuto nel centro di $A \otimes_K L$. Sia $z = \sum_{i=1}^n a_i \otimes l_i$ un elemento del centro di $A \otimes_K L$, e supponiamo che gli l_i siano linearmente indipendenti su K . Dato $a \in A$, si ha

$$0 = (a \otimes 1)z - z(a \otimes 1) = \sum_{i=1}^n (aa_i - a_i a) \otimes l_i,$$

da cui si ricava $a_i \in K$ per ogni i . Allora possiamo scrivere

$$z = 1 \otimes \sum_{i=1}^n a_i l_i = 1 \otimes l = l(1 \otimes 1) \in L(1 \otimes 1) \cong L.$$

Per la seconda parte osserviamo che l'unico \bar{K} -corpo è \bar{K} . Infatti se D è un \bar{K} -corpo, allora D è generato su \bar{K} da certi elementi x_1, \dots, x_n , e ogni x_i è algebrico su \bar{K} , per cui $x_i \in \bar{K}$. Dalla prima parte si ha che $A \otimes_K \bar{K}$ è una \bar{K} -algebra centrale semplice, allora per il teorema di Wedderburn, $A \otimes_K \bar{K} \cong \mathcal{M}_n(\bar{K})$. Osserviamo infine che

$$\dim_K A = \dim_{\bar{K}} A \otimes_K \bar{K} = \dim_{\bar{K}} \mathcal{M}_n(\bar{K}) = n^2. \quad \square$$

Se A è una K -algebra centrale semplice e D è la sua componente corpo, abbiamo che la dimensione di D su K è un quadrato, scriviamo $\dim_K D = h^2$, e h è detto l'indice di A (si indicherà con $\text{ind}(A)$). Notiamo che A è un K -corpo se e soltanto se $(\text{ind}(A))^2 = \dim_K A$.

2.2 DEFINIZIONE E PRIMI ESEMPI

Vogliamo adesso introdurre una relazione di equivalenza tra K -algebre centrali semplici. Diciamo che due K -algebre centrali semplici

A e B sono *equivalenti*, e scriviamo $A \sim B$, se e soltanto se esistono $s, t \in \mathbb{N}$ tali che

$$A \otimes_K \mathcal{M}_s(K) \cong B \otimes_K \mathcal{M}_t(K).$$

Osserviamo che quella appena definita è effettivamente una relazione di equivalenza, tenendo conto delle proprietà del prodotto tensore riassunte nel seguente lemma.

LEMMA 2.2.1. *Dati un campo K e una K -algebra centrale semplice A , valgono le seguenti:*

1. $\mathcal{M}_n(K) \otimes_K \mathcal{M}_m(K) \cong \mathcal{M}_{nm}(K)$;
2. $\mathcal{M}_n(K) \otimes_K A \cong \mathcal{M}_n(A)$;
3. $A \otimes_K A^{op} \cong \mathcal{M}_n(K)$, dove $n = \dim_K A$ e A^{op} è l'algebra opposta o inversa, ossia il gruppo additivo A con il prodotto $*$ definito da $a * b = ba$ per ogni $a, b \in A$.

Dimostrazione. Un elemento $A \otimes_K B \in \mathcal{M}_n(K) \otimes_K \mathcal{M}_m(K)$ corrisponde a un'applicazione bilineare

$$A \otimes_K B: K^n \otimes_K K^m \rightarrow K^n \otimes_K K^m.$$

Osservando che $K^n \otimes_K K^m \cong K^{nm}$, questo ci dà un'applicazione

$$\psi: \mathcal{M}_n(K) \otimes_K \mathcal{M}_m(K) \rightarrow \mathcal{M}_{nm}(K).$$

Se $\{e_i\}$ è una base di K^n e $\{f_h\}$ è una base di K^m , i vettori $e_i \otimes f_h$ formano una base di K^{nm} . Inoltre se indichiamo con $\{E_{ij}\}$ e $\{F_{ij}\}$ le basi di $\mathcal{M}_n(K)$ e $\mathcal{M}_m(K)$ costituite dalle matrici che hanno tutti i coefficienti nulli tranne quello in posizione (i, j) che è uguale a 1, vediamo che

$$(E_{ij} \otimes E_{hl})(e_s \otimes e_t) = E_{ij}e_s \otimes E_{hl}e_t = \begin{cases} 0 & \text{se } s \neq j \text{ e } t \neq l \\ e_i \otimes e_h & \text{se } s = j \text{ e } t = l. \end{cases}$$

Dunque $\psi(E_{ij} \otimes E_{hl}) = E_{ih, jl}$, ossia ψ manda una base in una base ed è perciò un isomorfismo.

Proviamo ora il secondo punto. Consideriamo l'inclusione

$$i: K \rightarrow A$$

tale che $i(k) = k1$ per ogni $k \in K$. La mappa i induce un'applicazione $j: \mathcal{M}_n(K) \rightarrow \mathcal{M}_n(A)$, che a sua volta induce

$$j_A: \mathcal{M}_n(K) \otimes_K A \rightarrow \mathcal{M}_n(A)$$

tale che $j_A(h \otimes a) = aj(h)$ per $a \in A$, $h \in \mathcal{M}_n(K)$. Dal momento che $\mathcal{M}_n(K)$ è un K -modulo libero con base $\{E_{i,j}\}_{i,j=1,\dots,n}$, si ha che $\mathcal{M}_n(K) \otimes_K A$ è un A -modulo libero con base $\{E_{i,j} \otimes 1\}_{i,j=1,\dots,n}$. Inoltre j_A manda la base $\{E_{i,j} \otimes 1\}_{i,j=1,\dots,n}$ nella base $\{F_{i,j}\}_{i,j=1,\dots,n}$ dell' A -modulo $\mathcal{M}_n(A)$. Perciò j_A è un isomorfismo.

Infine mostriamo che $A \otimes_K A^{\text{op}} \cong \mathcal{M}_n(K)$. Per fare questo vediamo A come spazio vettoriale su K , allora l'anello delle trasformazioni lineari di A su K , $L(A)$, ha dimensione n^2 su K ed è isomorfo a $\mathcal{M}_n(K)$, dove $n = \dim_K A$. Definiamo le trasformazioni lineari

$$\begin{aligned} Ra: A &\rightarrow A & e & & La: A &\rightarrow A \\ R_a(b) &= ba & & & L_a(b) &= ab \end{aligned}$$

per ogni $a \in A$, e consideriamo le K -algebre

$$A_r = \{ R_a \mid a \in A \} \quad e \quad A_l = \{ L_a \mid a \in A \}.$$

È immediato verificare che $A_r \cong A$ e $A_l \cong A^{\text{op}}$; inoltre ogni elemento di A_r commuta con ogni elemento di A_l . Quindi si ha

$$A \otimes_K A^{\text{op}} \cong A_r \otimes_K A_l,$$

e dal momento che A_r e A_l sono K -algebre centrali semplici, anche $A_r \otimes_K A_l$ lo è. Definiamo poi la mappa

$$\phi: A_r \otimes_K A_l \rightarrow A_r A_l \subset L(A)$$

tale che $\phi(R_a \otimes L_b) = R_a L_b$. Osserviamo che ϕ è un omomorfismo di K -algebre per le proprietà di commutatività di A_r e A_l . Per definizione ϕ è suriettivo, ed è un isomorfismo dato che $A_r \otimes_K A_l$ è semplice. Allora $A_r \otimes_K A_l \cong A_r A_l$. Ma

$$n^2 = \dim_K L(A) \geq \dim_K A_r A_l = \dim_K (A \otimes_K A^{\text{op}}) = (\dim_K A)^2 = n^2,$$

per cui $A_r A_l = L(A)$ e $A \otimes_K A^{\text{op}} \cong L(A) \cong \mathcal{M}_n(K)$. □

PROPOSIZIONE 2.2.2. *Date due K -algebre centrali semplici $A \cong \mathcal{M}_n(D)$ e $B \cong \mathcal{M}_m(E)$, con D ed E K -corpi, allora*

1. $A \sim B$ se e solo se $D \cong E$;
2. $A \sim B$ e $\dim_K A = \dim_K B$ se e solo se $A \cong B$;
3. in ogni classe modulo \sim esiste un unico K -corpo (a meno di isomorfismi), detto la componente corpo comune a tutti gli elementi della classe.

Dimostrazione. Se $A \sim B$, allora esistono $s, t \in \mathbb{N}$ tali che

$$A \otimes_K \mathcal{M}_s(K) \cong B \otimes_K \mathcal{M}_t(K),$$

ma questo è equivalente per il lemma precedente a

$$\mathcal{M}_{sn}(D) \cong \mathcal{M}_{tm}(E),$$

da cui segue per il teorema di Wedderburn che $D \cong E$ e $sn = tm$. Viceversa se $D \cong E$, esistono $s, t \in \mathbb{N}$ tali che $sn = tm$ e

$$A \otimes_K \mathcal{M}_s(K) \cong \mathcal{M}_{sn}(D) \cong \mathcal{M}_{tm}(E) \cong B \otimes_K \mathcal{M}_t(K).$$

Per la seconda parte osserviamo che se $\dim_K A = \dim_K B$ e

$$A \otimes_K \mathcal{M}_s(K) \cong B \otimes_K \mathcal{M}_t(K),$$

allora si deve avere $s = t$. Siccome abbiamo visto che deve valere $sn = tm$ e $D \cong E$, si ricava $n = m$ e $A \cong \mathcal{M}_n(D) \cong \mathcal{M}_m(E) \cong B$. Il viceversa è ovvio.

Infine osserviamo che per il teorema di Wedderburn ogni K -algebra centrale semplice $A \cong \mathcal{M}_n(D)$ è equivalente alla sua componente corpo D e che le componenti corpo relative a elementi della stessa classe sono isomorfe per il primo punto. \square

Indichiamo con $\text{Br}(K)$ l'insieme delle classi di equivalenza delle K -algebre centrali semplici, e definiamo un'operazione tra gli elementi di $\text{Br}(K)$ nel modo seguente

$$[A] + [B] = [A \otimes_K B], \quad \text{per ogni } [A], [B] \in \text{Br}(K).$$

Da quanto visto sulle K -algebre centrali semplici e dalle proprietà del prodotto tensore segue che l'operazione $+$ è ben definita, e che $(\text{Br}(K), +)$ è un gruppo abeliano. L'elemento neutro è ovviamente $0 = [K] = [\mathcal{M}_1(K)]$, mentre l'inverso è $-[A] = [A^{\text{op}}]$, per ogni elemento $[A] \in \text{Br}(K)$.

DEFINIZIONE 2.2.3. Dato un campo K , $(\text{Br}(K), +)$ è detto il *gruppo di Brauer* di K .

Notiamo che per determinare il gruppo di Brauer di un campo K basta considerare solo i K -corpi, in quanto per il teorema di Wedderburn ogni K -algebra centrale semplice A è equivalente a un anello di divisione con centro K . Quindi possiamo vedere gli elementi di $\text{Br}(K)$ come classi di isomorfismo di K -corpi.

Ad esempio abbiamo già visto che le uniche algebre di divisione con centro \mathbb{R} sono \mathbb{R} e l'algebra dei quaternioni \mathbb{H} , e queste sono

elementi distinti in $\text{Br}(\mathbb{R})$ poiché $\mathbb{R} \not\cong \mathbb{H}$, per cui come avevamo anticipato

$$\text{Br}(\mathbb{R}) = \{[\mathbb{R}], [\mathbb{H}]\} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

Un altro caso molto semplice da trattare è quello di un campo K algebricamente chiuso. Infatti se $[A] \in \text{Br}(K)$ e $\dim_K A = n^2$, allora

$$A \cong A \otimes_K K \cong \mathcal{M}_n(K),$$

ossia $\text{Br}(K) = \{[K]\} = 0$.

Così pure si ha $\text{Br}(K) = 0$ se K è un campo finito, come segue dal seguente teorema.

TEOREMA 2.2.4 (Piccolo teorema di Wedderburn). *Tutti i corpi finiti sono commutativi.*

Dimostrazione. Siano D un corpo finito e K il suo centro. Supponiamo $|K| = q$ e $\dim_K D = n$, allora $|D| = q^n$. Dobbiamo mostrare che $n = 1$. Indichiamo con D^* il gruppo moltiplicativo degli elementi non nulli di D , allora vale la formula delle classi

$$|D^*| = q^n - 1 = \sum_{x_i \in R} [D^* : \text{Stab}(x_i)],$$

dove R è un insieme di rappresentanti delle classi di coniugio di D^* , e $\text{Stab}(x_i)$ denota lo stabilizzatore di x_i in D^* . Se $x_i \in K$, $\text{Stab}(x_i) = D^*$ per cui il contributo di x_i alla somma è 1. Inoltre $|K \cap D^*| = q - 1$, quindi il contributo totale degli elementi di K^* è $q - 1$. Sia ora $x_i \notin K$, allora il sottoinsieme degli elementi di D che commutano con x_i è un sottoanello di divisione D_i di D contenente K . Dunque $|D_i| = q^{n_i}$, dove $n_i = \dim_K D_i$. Osserviamo che $n_i < n$, dal momento che $x_i \notin K$ e quindi $D_i \neq D$. Inoltre $\text{Stab}(x_i) = D_i \cap D^*$, di conseguenza si ha $|\text{Stab}(x_i)| = q^{n_i} - 1$. Possiamo perciò riscrivere la formula delle classi come

$$q^n - 1 = (q - 1) + \sum_i \frac{q^n - 1}{q^{n_i} - 1},$$

dove $n_i < n$ per ogni i . Vediamo che n_i divide n , infatti si può considerare D come uno spazio vettoriale (a sinistra) su D_i , che a sua volta è uno spazio vettoriale su K , per cui vale una formula dei gradi analoga a quella per le estensioni di campi.

Indichiamo con $p_n(x) = \prod_{(i,n)=1} (x - \zeta_n^i) \in \mathbb{Z}[x]$ l' n -esimo polinomio ciclotomico (dove $\zeta_n \in \mathbb{C}$ è una radice primitiva n -esima dell'unità), allora

$$x^n - 1 = \prod_{d|n} p_d(x).$$

Se $n_i|n$ e $n_i < n$, allora il polinomio $\frac{x^n-1}{x^{n_i}-1} \in \mathbb{Z}[x]$ è divisibile per $p_n(x)$. Quindi $p_n(q) \in \mathbb{Z}$ divide $q^n - 1$ e $\frac{q^n-1}{q^{n_i}-1}$. Dalla formula delle classi segue che $p_n(q)$ divide anche $q - 1$.

Supponiamo per assurdo $n > 1$ e consideriamo la fattorizzazione $p_n(x) = \prod_{(i,n)=1} (x - \zeta_n^i)$. Dal momento che $n > 1$, $\zeta_n^i \neq 1$ per ogni i tale che $(i, n) = 1$, e inoltre la distanza del punto q sull'asse reale da ognuno degli ζ_n^i è maggiore della distanza di q da 1, cioè

$$|q - \zeta_n^i| > ||q| - |\zeta_n^i|| = |q - 1| = q - 1.$$

Quindi

$$|p_n(q)| = \prod_{(i,n)=1} |q - \zeta_n^i| > q - 1,$$

che contraddice il fatto che $p_n(q)$ divida $q - 1$. Dunque possiamo concludere che $n = 1$ e $D = k$. \square

2.3 IL GRUPPO DI BRAUER RELATIVO

Sia $K \subset L$ un'estensione di campi. Abbiamo visto che se A è una K -algebra centrale semplice, allora $A \otimes_K L$ è una L -algebra centrale semplice. Possiamo perciò definire un omomorfismo

$$r_{L/K}: \text{Br}(K) \rightarrow \text{Br}(L)$$

tale che $r_{L/K}([A]) = [A \otimes_K L]$. Si vede subito, dalle proprietà del prodotto tensoriale riassunte nel lemma 2.2.1, che questa mappa è ben definita ed è un omomorfismo. Osserviamo inoltre che se si ha $K \subset L \subset M$, allora

$$r_{M/K} = r_{M/L} \circ r_{L/K},$$

poiché se $[A] \in \text{Br}(K)$, allora $(A \otimes_K L) \otimes_L M \cong A \otimes_K M$.

DEFINIZIONE 2.3.1. Data un'estensione di campi $K \subset L$, il nucleo dell'omomorfismo $r_{L/K}$ è detto il *gruppo di Brauer relativo* di L/K , e si indica con $\text{Br}(L/K)$. Se $[A] \in \text{Br}(K)$ e $K \subset L$ è un'estensione tale che $[A] \in \text{Br}(L/K)$, cioè $A \otimes_K L \cong \mathcal{M}_n(L) \sim L$, allora L è detto *campo di spezzamento* di A .

Notiamo che ogni K -algebra centrale semplice ha un campo di spezzamento dato da una chiusura algebrica \bar{K} di K , infatti per la proposizione 2.1.5 si ha

$$A \otimes_K \bar{K} \sim K.$$

LEMMA 2.3.2. *Sia K un campo tale che $\text{char } K = p > 0$, e sia D un K -corpo. Se $d \in D$ è un elemento tale che $d \notin K$ ma $d^p \in K$, ossia l'estensione $K \subset K(d)$ è puramente inseparabile di grado p , allora esiste un'estensione separabile $K \subset L$ tale che $K \neq L \subset D$.*

Dimostrazione. Consideriamo l'automorfismo $\sigma: D \rightarrow D$ definito da $\sigma(x) = dx d^{-1}$. Per ipotesi $\sigma \neq \text{id}_D$ ma $\sigma^p = \text{id}_D$. Sia poi $\tau = \sigma - \text{id}_D$, allora $\tau \neq 0$ e $\tau^p = \sigma^p - \text{id}_D^p = 0$. Esisterà perciò un r massimo per cui $\tau^r \neq 0$, con $1 \leq r < p$. Sia $y \in D$ tale che $\tau^r(y) \neq 0$, poniamo $\tau^{r-1}(y) = a \neq 0$ e $\tau(a) = b$. Segue che

$$\sigma(a) = \tau(a) + a = b + a \quad \text{e} \quad \sigma(b) = b.$$

Quindi se $c = b^{-1}a$,

$$\sigma(c) = \sigma(b^{-1})\sigma(a) = b^{-1}(b + a) = 1 + c.$$

Ora consideriamo il campo $M = K(c) = K(1 + c) \subset D$. L'estensione $K \subset M$ non può essere puramente inseparabile dal momento che ammette un automorfismo di K -algebra $\sigma|_M \neq \text{id}_M$, quindi basta prendere la chiusura separabile di K in M . \square

PROPOSIZIONE 2.3.3. *Sia D un K -corpo, $D \neq K$, allora esiste un'estensione separabile $K \subset L$ tale che $K \neq L \subset D$.*

Dimostrazione. Se $\text{char } K = 0$, allora K è perfetto e la proposizione è ovvia. Supponiamo $\text{char } K = p > 0$. Se per assurdo non esiste un'estensione L come nell'enunciato, allora ogni elemento $x \in D$ è puramente inseparabile su K , per cui esiste un certo n tale che $d = x^{p^n} \notin K$ e $d^p \in K$. Ma questo dà una contraddizione per il lemma precedente. \square

LEMMA 2.3.4. *Siano $B \subset A$ due algebre centrali semplici con centro rispettivamente L e K , tali che $K \subset L$ e $\dim_K B > \infty$. Valgono i seguenti fatti:*

1. $A \otimes_K L \cong \mathcal{M}_n(B \otimes_L Z_A(B))$, dove $Z_A(B)$ è il centralizzatore di B in A e $n = [L : K]$;
2. $\text{ind } Z_A(L) = \text{ind } A/[L : K]$;

3. se A è un corpo, allora L è un sottocampo massimale di A se e solo se $L = Z_A(L)$, se e solo se $[L : K] = \text{ind } A$.

Dimostrazione. Vediamo che il primo punto implica il secondo, infatti se prendiamo $B = L$, si ha

$$\dim_L Z_A(L)[L : K]^2 = \dim_L A \otimes_K L = \dim_K A,$$

da cui si ricava $\text{ind } Z_A(L)[L : K] = \text{ind } A$. Osserviamo poi che la prima parte del terzo punto è immediata, e il resto deriva dal secondo punto. Per quanto riguarda la dimostrazione del primo punto, si veda Draxl [11, I.7]. \square

TEOREMA 2.3.5 (Köthe). *Dato un K -corpo D , esiste un sottocampo massimale $M \subset D$, tale che $K \subset M$ è separabile.*

Dimostrazione. Procediamo per induzione su $\text{ind}(D)$. Se $\text{ind}(D) = 1$, allora $D = K$ e l'enunciato è ovvio. Supponiamo $\text{ind}(D) > 1$. Sia L un campo come nella proposizione precedente e consideriamo il centralizzatore E di L in D . Allora E è un L -corpo di indice

$$\text{ind}(E) = \text{ind}(D)/[L : K] < \text{ind}(D).$$

Per ipotesi induttiva E contiene un sottocampo massimale M tale che $L \subset M$ è separabile, di conseguenza $K \subset M$ è separabile. Inoltre il sottocampo M è massimale, poiché si ha

$$[M : K] = [M : L][L : K] = \text{ind}(E)[L : K] = \text{ind}(D). \quad \square$$

TEOREMA 2.3.6. *Sia $K \subset L$ un'estensione finita e sia $[A] \in \text{Br}(K)$. Allora $[A] \in \text{Br}(L/K)$ se e solo se esistono A' con $[A'] = [A]$ in $\text{Br}(K)$, e un sottocampo $L \subset A'$ tale che $[L : K]^2 = \dim_K A'$.*

Dimostrazione. Supponiamo che esista A' come nell'enunciato, allora per il lemma 2.3.4 L coincide con il centralizzatore Z di L in A' . Dal momento che $A' \otimes_K L \cong \mathcal{M}_r(Z)$, otteniamo che

$$r_{L/K}([A]) = r_{L/K}([A']) = [L] = 0.$$

Viceversa poniamo $n^2 = \dim_K A = \dim_L A \otimes_K L$ e $m = [L : K]$. Per ipotesi si ha $A^{\text{op}} \otimes_K L \cong \mathcal{M}_n(L)$. Se poniamo $B = \mathcal{M}_{nm}(K)$, allora abbiamo

$$A^{\text{op}} \otimes_K L \cong \mathcal{M}_n(L) \cong \text{End}_L(L^n) \subset \text{End}_K(L^n) \cong \mathcal{M}_{nm}(K) = B.$$

Tramite queste identificazioni possiamo immergere L e A^{op} in B . Definiamo A' come il centralizzatore di A^{op} in B . Per costruzione $L \subset A'$ e dal lemma 2.3.4 abbiamo che $A' \otimes_K A^{\text{op}} \cong B$, per cui

$$[A'] = [B] - [A^{\text{op}}] = -[A^{\text{op}}] = [A].$$

Infine

$$\dim_K A' = \dim_K B / \dim_K A^{\text{op}} = m^2 n^2 / n^2 = [L : K]^2. \quad \square$$

COROLLARIO 2.3.7. *Ogni sottocampo massimale L di un K -corpo D è un campo di spezzamento di D .*

COROLLARIO 2.3.8. *Per ogni $[A] \in \text{Br}(K)$ esiste un campo di spezzamento L di A tale che $K \subset L$ è separabile e $[L : K] = \text{ind}(A)$.*

Dimostrazione. Basta applicare il corollario precedente e il teorema di Köthe alla componente corpo di $[A]$. \square

TEOREMA 2.3.9. *Dato un campo K , si ha*

$$\text{Br}(K) = \varinjlim \text{Br}(L/K),$$

dove il limite è su tutte le estensioni finite e di Galois $K \subset L$.

Dimostrazione. Per definizione $\text{Br}(L/K) \subset \text{Br}(K)$ per ogni estensione finita e di Galois $K \subset L$. Sia $[A] \in \text{Br}(K)$, allora per il corollario precedente esiste un'estensione separabile e finita $K \subset L$ tale che $[A] \in \text{Br}(L/K)$. Basta quindi prendere un'estensione di Galois finita $K \subset M$ tale che $L \subset M$, dal momento che $r_{M/K} = r_{M/L} \circ r_{L/K}$, e di conseguenza

$$[A] \in \text{Br}(L/K) \subset \text{Br}(M/K). \quad \square$$

2.4 INTERPRETAZIONE COOMOLOGICA

Sia $K \subset L$ un'estensione finita e di Galois di grado n , e poniamo $G = \text{Gal}(L/K)$. Vogliamo mettere in relazione il gruppo di Brauer relativo di L/K con il secondo gruppo di coomologia di Galois di G a coefficienti in L^* . Ricordiamo che

$$H^2(G, L^*) = \frac{Z^2(G, L^*)}{B^2(G, L^*)},$$

dove $Z^2(G, L^*)$ è l'insieme delle funzioni $f: G \times G \rightarrow L^*$ tali che

$$f(g_1, g_2)f(g_1g_2, g_3) = g_1(f(g_2, g_3))f(g_1, g_2g_3),$$

e $B^2(G, L^*)$ è l'insieme delle funzioni $f: G \times G \rightarrow L^*$ tali che

$$f(g_1, g_2) = \alpha(g_1)\alpha(g_1g_2)^{-1}g_1(\alpha(g_2)),$$

per qualche $\alpha: G \rightarrow L^*$. Osserviamo che per ogni elemento z in $H^2(G, L^*)$ esiste un rappresentante $f: G \times G \rightarrow L^*$ *normalizzato*, nel senso che $f(g_1, 1) = f(1, g_2) = 1$ per ogni $g_1, g_2 \in G$. Infatti sia $f': G \times G \rightarrow L^*$ un rappresentante qualsiasi di z e poniamo $t = f'(1, 1)^{-1}$. Consideriamo la mappa $\alpha: G \rightarrow L^*$ tale che $\alpha(g) = g(t)$ per ogni $g \in G$. Allora possiamo definire

$$f(g_1, g_2) = \alpha(g_1)\alpha(g_1g_2)^{-1}g_1(\alpha(g_2))f'(g_1, g_2) = g_1(t)f'(g_1, g_2),$$

e si verifica facilmente che f è normalizzato. Quindi

$$H^2(G, L^*) = \frac{\{f \in Z^2(G, L^*) \mid f(g_1, 1) = f(1, g_2) = 1\}}{\{f_\alpha \in B^2(G, L^*) \mid \alpha: G \rightarrow L^*, \alpha(1) = 1\}}.$$

Dato un elemento $f \in Z^2(G, L^*)$ tale che $f(g, 1) = f(1, g) = 1$ per ogni $g \in G$, definiamo un K -spazio vettoriale $(f, L/K)$ di dimensione n^2 ponendo

$$(f, L/K) = \bigoplus_{g \in G} Le_g,$$

dove $\{e_g\}_{g \in G}$ è una famiglia di simboli. Introduciamo poi su $(f, L/K)$ una moltiplicazione descritta dalle seguenti formule

$$\begin{aligned} e_g a &= g(a)e_g \quad \text{per ogni } a \in L, \\ e_{g_1} e_{g_2} &= f(g_1, g_2)e_{g_1 g_2}, \\ \left(\sum_{g \in G} a_g e_g \right) \left(\sum_{h \in G} b_h e_h \right) &= \sum_{g, h \in G} a_g e_g b_h e_h. \end{aligned}$$

PROPOSIZIONE 2.4.1. *Con le notazioni come sopra, si ha che gli elementi e_g sono invertibili, $e_1 = 1$, e $(f, L/K)$ è una K -algebra centrale semplice con campo di spezzamento L , cioè $[(f, L/K)] \in \text{Br}(L/K)$.*

Dimostrazione. Per verificare che la moltiplicazione definita è associativa basta scrivere il prodotto di tre elementi in modo esplicito e usare le formule scritte sopra. Mostriamo che $e_1 = 1$,

$$\begin{aligned} \left(\sum_{g \in G} a_g e_g \right) e_1 &= \sum_{g \in G} a_g e_g e_1 = \sum_{g \in G} a_g f(g, 1)e_g = \sum_{g \in G} a_g e_g, \\ e_1 \left(\sum_{g \in G} a_g e_g \right) &= \sum_{g \in G} e_1 a_g e_g = \sum_{g \in G} a_g f(1, g)e_g = \sum_{g \in G} a_g e_g. \end{aligned}$$

Ne segue che

$$e_g^{-1} = f(g^{-1}, g)^{-1} e_{g^{-1}}.$$

Consideriamo ora $L \cong Le_1 \subset (f, L/K)$. Sia $a \in L$, allora

$$a \left(\sum_{g \in G} a_g e_g \right) - \left(\sum_{g \in G} a_g e_g \right) a = \sum_{g \in G} a a_g e_g - \sum_{g \in G} a_g a e_g = 0,$$

e dunque L è contenuto nel centro di $(f, L/K)$.

D'altra parte se $z = \sum_{g \in G} a_g e_g$ è un elemento del centro, in particolare z commuta con gli elementi di L , cioè per ogni $a \in L$ si ha

$$0 = a \left(\sum_{g \in G} a_g e_g \right) - \left(\sum_{g \in G} a_g e_g \right) a = \sum_{g \in G} (a a_g - a_g g(a) e_g),$$

da cui si ricava che se $a_g \neq 0$ allora $g(a) = a$ per ogni $a \in L$, ossia $g = 1$, e quindi $z = a_1 \in L$. Rimane da mostrare che $(f, L/K)$ non ha ideali bilateri propri non nulli. Sia $I \neq 0$ un ideale bilatero di $(f, L/K)$. Sia $z \in I$ un elemento non nullo di I , allora

$$z = \sum_{g \in H_z} a_g e_g$$

dove $H_z \subset G$ e $a_g \neq 0$ per ogni $g \in H_z$. Se H_z contiene un solo elemento h , ne segue che $z = a_h e_h$ e $1 = a_h^{-1} z e_h^{-1} \in I$, cioè $I = (f, L/K)$. Supponiamo che per ogni elemento non nullo di I il corrispondente sottoinsieme H_z abbia almeno due elementi, e sia $z \in I$ tale che la cardinalità di H_z è minima. Siano $g, h \in H_z$ e $a \in L$ tali che $g(a) \neq h(a)$, allora

$$y = z - g(a)^{-1} z a = \sum_{d \in H_z} (a_d - g(a)^{-1} d(a) a_d) e_d = \sum_{d \in H_y} b_d e_d \in I,$$

e osserviamo che $y \neq 0$ poiché $b_h = a_h - g(a)^{-1} h(a) a_h \neq 0$. Inoltre $H_y = H_z \setminus \{g\}$, il che è assurdo per la minimalità di H_z . \square

DEFINIZIONE 2.4.2. Un'algebra della forma $(f, L/K)$ è detta *prodotto incrociato*.

LEMMA 2.4.3. Sia L/K un'estensione finita e di Galois con $G = \text{Gal}(L/K)$. Se $f_1, f_2 \in Z^2(G, L^*)$ rappresentano lo stesso elemento $[f_1] = [f_2]$ in $H^2(G, L^*)$, allora

$$(f_1, L/K) \cong (f_2, L/K).$$

Dimostrazione. Per ipotesi esiste $\alpha: G \rightarrow L^*$, tale che $\alpha(1) = 1$ e

$$f_1(g, h) = \alpha(g)\alpha(gh)^{-1}g(\alpha(h))f_2(g, h),$$

per ogni $g, h \in G$. Scriviamo

$$(f_1, L/K) = \bigoplus_{g \in G} Le_g \quad \text{e} \quad (f_2, L/K) = \bigoplus_{g \in G} Lf_g,$$

e poniamo $e'_g = \alpha(g)f_g \in (f_2, L/K)$. Allora si ha che

$$\begin{aligned} e'_g a &= \alpha(g)f_g a = \alpha(g)g(a)f_g = g(a)e'_g \quad \text{per ogni } a \in L, \\ e'_g e'_h &= \alpha(g)f_g \alpha(h)f_h = \alpha(g)g(\alpha(h))f_2(g, h)f_{gh} \\ &= f_1(g, h)\alpha(gh)f_{gh} = f_1(g, h)e'_{gh}, \end{aligned}$$

e dunque otteniamo un omomorfismo di K -algebre

$$\begin{aligned} \psi: (f_1, L/K) &\rightarrow (f_2, L/K) \\ \sum_{g \in G} a_g e_g &\mapsto \sum_{g \in G} a_g e'_g \end{aligned}$$

che è anche un isomorfismo. □

LEMMA 2.4.4. *Sia L/K un'estensione finita e di Galois con $G = \text{Gal}(L/K)$. Dati $f_1, f_2 \in Z^2(G, L^*)$, si ha*

$$(f_1, L/K) \otimes_K (f_2, L/K) \sim (f_1 f_2, L/K).$$

Dimostrazione. Innanzi tutto scriviamo $A = (f_1, L/K) = \bigoplus_{g \in G} Le_g$, $B = (f_2, L/K) = \bigoplus_{g \in G} Lf_g$ e $C = (f_1 f_2, L/K) = \bigoplus_{g \in G} Ll_g$, e consideriamo la K -algebra commutativa $L \otimes_K L \subset A \otimes_K B$. Sia ora $\zeta \in L$ tale che $L = K(\zeta)$, e sia $p(x) \in K[x]$ il polinomio minimo di ζ su K . Allora

$$p(x) = \prod_{g \in G} (x - g(\zeta)).$$

Prendiamo l'elemento

$$e = \prod_{g \neq 1, g \in G} \frac{\zeta \otimes 1 - 1 \otimes g(\zeta)}{\zeta \otimes 1 - g(\zeta) \otimes 1} \in L \otimes_K L \subset A \otimes_K B,$$

e vediamo $p(x)$ come un elemento di $K \otimes_K K[x]$. Allora

$$\begin{aligned} e(\zeta \otimes 1 - 1 \otimes \zeta) &= \prod_{g \in G} \frac{\zeta \otimes 1 - 1 \otimes g(\zeta)}{\zeta \otimes 1 - g(\zeta) \otimes 1} = \frac{p(\zeta \otimes 1)}{\zeta \otimes 1 - g(\zeta) \otimes 1} \\ &= \frac{p(\zeta) \otimes 1}{\zeta \otimes 1 - g(\zeta) \otimes 1} = 0, \end{aligned}$$

quindi $e(\xi \otimes 1) = (1 \otimes \xi)e$, e per induzione $e(\xi^i \otimes 1) = (1 \otimes \xi^i)e$, di conseguenza (poiché $L = \bigoplus_{i=0}^{n-1} K\xi^i$)

$$e(a \otimes 1) = (1 \otimes a)e \quad \text{per ogni } a \in L.$$

Fissiamo ora $g \in G$ e definiamo

$$e^{(g)} = \prod_{h \in G, h \neq 1} \frac{g(\xi) \otimes 1 - 1 \otimes gh(\xi)}{g(\xi) \otimes 1 - gh(\xi) \otimes 1} \in L \otimes_K L \subset A \otimes_K B.$$

Con semplici calcoli otteniamo che $ee^{(g)} = e$, e in particolare per $g = 1$ abbiamo che $e^2 = e$. Per costruzione il numeratore di e è un polinomio di grado $n - 1$ in $\xi \otimes 1$ su $K \otimes_K L$ con termine costante (a meno del segno) $1 \otimes \frac{1}{\xi} N_{L/K}(\xi) \neq 0$. Dal momento che

$$L \otimes_K L = \bigoplus_{i=0}^{n-1} (\xi \otimes 1)^i (K \otimes_K L),$$

si ha che e è idempotente diverso da zero. Consideriamo ora l'anello $C' = e(A \otimes_K B)e$ con unità e . Fissati $g, h \in G$, si ha

$$\begin{aligned} e(e_g \otimes f_h)e &= e(e_g \otimes f_h) \prod_{d \in G, d \neq 1} \frac{\xi \otimes 1 - 1 \otimes d(\xi)}{\xi \otimes 1 - d(\xi) \otimes 1} \\ &= e \prod_{d \in G, d \neq 1} \frac{g(\xi) \otimes 1 - 1 \otimes hd(\xi)}{g(\xi) \otimes 1 - gd(\xi) \otimes 1} (e_g \otimes f_h) \\ &= \begin{cases} ee^{(g)}(e_g \otimes f_g) = e(e_g \otimes f_g) & \text{se } g = h, \\ 0 & \text{se } g \neq h. \end{cases} \end{aligned}$$

Poniamo $e'_g = e(e_g \otimes f_g)e \in C'$, e vediamo che

$$\begin{aligned} e \left(\left(\sum_{g \in G} a_g e_g \right) \otimes \left(\sum_{h \in G} b_h f_h \right) \right) e \\ = \sum_{g, h \in G} e(a_g \otimes 1)(1 \otimes b_h)(e_g \otimes f_h)e = \sum_{g \in G} (a_g b_g \otimes 1) e'_g, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e'_g e'_h &= e(e_g \otimes f_g) e^2 (e_h \otimes f_h) e = e(e_g e_h \otimes f_g f_h) e \\ &= e(f_1(g, h) \otimes f_2(g, h))(e_{gh} \otimes f_{gh}) e = (f_1(g, h) f_2(g, h) \otimes 1) e'_{gh}, \end{aligned}$$

$$e'_g(a \otimes 1) = e(e_g a \otimes f_g) e = e(g(a) e_g \otimes f_g) e = (g(a) \otimes 1) e'_g$$

per ogni $a \in L$. Di conseguenza possiamo definire un omomorfismo di K -algebre suriettivo

$$\begin{aligned} \psi: C &\rightarrow C' \\ \sum_{g \in G} a_g e_g &\mapsto \sum_{g \in G} (a_g \otimes 1) e'_g \end{aligned}$$

che si verifica essere un isomorfismo. A questo punto possiamo concludere per il teorema di Wedderburn che $C' \sim A \otimes_K B$, e quindi $C \sim A \otimes_K B$. \square

TEOREMA 2.4.5 (Skolem-Noether). *Siano A e B due K -algebre centrali semplici. Se $f, g: A \rightarrow B$ sono omomorfismi di K -algebre, allora esiste un elemento $b \in B^*$ tale che $g(a) = bf(a)b^{-1}$ per ogni $a \in A$.*

Dimostrazione. Si veda Draxl [11, I.7]. \square

LEMMA 2.4.6. *Siano $K \subset L$ un'estensione di Galois finita con gruppo di Galois G , e sia $[A] \in \text{Br}(K)$ tale che $L \subset A$ e $\dim_K A = [L : K]^2$. Allora esiste un unico $[f] \in H^2(G, L^*)$ tale che il prodotto incrociato $(f, L/K)$ è isomorfo ad A .*

Dimostrazione. Osserviamo anzi tutto che per il lemma 2.3.4, L è un sottocampo massimale di A , dunque il centralizzatore di L in A coincide con L . Per il teorema di Skolem-Noether, dato $g \in G$ esiste $e_g \in A^*$ tale che

$$g(z) = e_g z e_g^{-1} \quad \text{per ogni } z \in A,$$

e si verifica che questi elementi sono linearmente indipendenti su L . Allora per questioni di dimensione si ha

$$A = \bigoplus_{g \in G} L e_g.$$

Si ricava perciò che

$$e_g a = g(a) e_g \quad \text{per ogni } a \in L,$$

e per costruzione $e_1 = 1$. Inoltre

$$e_{gh} a e_{gh}^{-1} = g h(a) = g(e_h a e_h^{-1}) = e_g e_h a e_h^{-1} e_g^{-1}$$

per ogni $a \in L$, da cui segue che $e_{gh}^{-1} e_g e_h \in L$. Definiamo

$$f: G \times G \rightarrow L^*,$$

tale che $f(g, h) = gh(e_{gh}^{-1}e_g e_h)$. Abbiamo che

$$f(g, h)e_{gh} = gh(e_{gh}^{-1}e_g e_h)e_{gh} = e_{gh}(e_{gh}^{-1}e_g e_h)e_{gh}^{-1}e_{gh} = e_g e_h,$$

e $f(1, g) = f(g, 1) = g(1) = 1$. Siano poi $g_1, g_2, g_3 \in G$, allora

$$\begin{aligned} f(g_1, g_2)f(g_1g_2, g_3)e_{g_1g_2g_3} &= f(g_1, g_2)e_{g_1g_2}e_{g_3} = e_{g_1}e_{g_2}e_{g_3} \\ &= e_{g_1}f(g_2, g_3)e_{g_2g_3} = g_1(f(g_2, g_3))e_{g_1}e_{g_2g_3} \\ &= g_1(f(g_2, g_3))f(g_1, g_2g_3)e_{g_1g_2g_3}, \end{aligned}$$

per cui $f \in Z^2(G, L^*)$. Questo mostra l'esistenza di un prodotto incrociato isomorfo ad A . Per quanto riguarda l'unicità, sia $f' \in Z^2(G, L^*)$, tale che $A \cong (f', L/K) = \bigoplus_{g \in G} Lf_g$, allora

$$e_g a e_g^{-1} = g(a) = f_g a f_g^{-1} \quad \text{per ogni } a \in L,$$

ossia $f_g^{-1}e_g \in L$, e di conseguenza $e_g f_g^{-1} \in L$. Definiamo quindi $\alpha: G \rightarrow L^*$ tale che $\alpha(g) = e_g f_g^{-1}$ per ogni $g \in G$, e osserviamo che $\alpha(1) = 1$. Inoltre $e_g = \alpha(g)f_g$, allora

$$\begin{aligned} f(g, h) &= gh(e_{gh}^{-1}e_g e_h) = gh(f_{gh}^{-1}\alpha(gh))^{-1}\alpha(g)f_g\alpha(h)f_h \\ &= gh(f_{gh}^{-1}\alpha(gh))^{-1}\alpha(g)g(\alpha(h))f_g f_h \\ &= gh((gh)^{-1}(\alpha(gh))^{-1}\alpha(g)g(\alpha(h)))f_{gh}^{-1}f_g f_h \\ &= (\alpha(gh))^{-1}\alpha(g)g(\alpha(h))gh(f_{gh}^{-1}f_g f_h) \\ &= \alpha(gh)^{-1}\alpha(g)g(\alpha(h))f'(g, h), \end{aligned}$$

ossia $[f] = [f']$ in $H^2(G, L^*)$. □

Mettendo insieme questi ultimi tre lemmi otteniamo il seguente risultato.

TEOREMA 2.4.7. *Sia L/K un'estensione di Galois finita e sia $G = \text{Gal}(L/K)$. La mappa*

$$Z^2(G, L^*) \rightarrow \text{Br}(L/K), \quad f \mapsto [(f, L/K)]$$

induce un isomorfismo

$$\Omega_{L/K}: H^2(G, L^*) \rightarrow \text{Br}(L/K).$$

COROLLARIO 2.4.8. *Sia K un campo e K_s una sua chiusura separabile. Se $G = \text{Gal}(K_s/K)$, allora*

$$\text{Br}(K) \cong H^2(G, K_s^*).$$

In particolare $\text{Br}(K)$ è un gruppo di torsione.

Dimostrazione. Abbiamo visto che

$$\mathrm{Br}(K) = \varinjlim \mathrm{Br}(L/K),$$

dove il limite è su tutte le estensioni di Galois finite $K \subset L$. Allora dal teorema precedente segue che

$$\begin{aligned} \mathrm{Br}(K) &= \varinjlim \mathrm{Br}(L/K) \cong \varinjlim H^2(\mathrm{Gal}(L/K), L^*) \\ &\cong H^2(\varprojlim \mathrm{Gal}(L/K), \varinjlim L^*) = H^2(\mathrm{Gal}(K_s/K), K_s^*). \quad \square \end{aligned}$$

3

DIMENSIONE COOMOLOGICA

In questo capitolo introdurremo alcune nozioni di dimensione relative a un campo, l'importanza delle quali si manifesterà nel legame tra proprietà aritmetiche del campo considerato e proprietà geometriche (nel senso della geometria algebrica) dello spettro di tale campo.

3.1 DIMENSIONE COOMOLOGICA E PROPRIETÀ C_r

Dato un gruppo profinito G , definiamo la dimensione coomologica di G , $\text{cd } G$, come il minimo $n \in \mathbb{N}$ per cui $H^r(G, A) = 0$ per ogni $r > n$ e per ogni G -modulo di torsione A . Se p è un numero primo, definiamo la p -dimensione coomologica di G , $\text{cd}_p G$, come il minimo $n \in \mathbb{N}$ per cui la componente di torsione p -primaria $H^r(G, A)_p$ di $H^r(G, A)$ è nulla per ogni $r > n$ e per ogni G -modulo di torsione A . Analogamente si definiscono la dimensione coomologica stretta $\text{scd } G$ e la p -dimensione coomologica stretta $\text{scd}_p G$ considerando tutti i G -moduli (non solo quelli di torsione).

DEFINIZIONE 3.1.1. Dato un campo k e indicata con k_s una sua chiusura separabile, la *dimensione coomologica (stretta)* e la *p -dimensione coomologica (stretta)* di k sono rispettivamente la dimensione coomologica (stretta) e la p -dimensione coomologica (stretta) del gruppo di Galois $\text{Gal}(k_s/k)$, e si indicano con $\text{cd } k$ ($\text{scd } k$) e $\text{cd}_p k$ ($\text{scd}_p k$).

PROPOSIZIONE 3.1.2. *Valgono le seguenti relazioni:*

1. $\text{cd } k = \sup_p \text{cd}_p k$,
2. $\text{scd } k = \sup_p \text{scd}_p k$,
3. $\text{cd } k \leq \text{scd } k$, $\text{cd}_p k \leq \text{scd}_p k$.

Dimostrazione. Tutte le proprietà elencate seguono immediatamente dalle definizioni e dal fatto che i gruppi $H^r(G, A)$ sono di torsione per ogni $r > 0$ e per ogni G -modulo discreto A (corollario 1.4). \square

Notiamo inoltre che se $\text{cd}_p k \leq n$ e $k \subset k'$ è un'estensione separabile, allora $\text{cd}_p k' \leq n$ (vale l'analogia proprietà per la dimensione coomologia stretta).

PROPOSIZIONE 3.1.3. Per ogni numero primo p si ha

$$\begin{aligned} \text{cd}_p k &\leq \text{scd}_p k \leq \text{cd}_p k + 1 \\ \text{cd } k &\leq \text{scd } k \leq \text{cd } k + 1. \end{aligned}$$

Dimostrazione. Poniamo $G = \text{Gal}(k_s/k)$. Basta studiare il caso in cui $\text{cd}_p k < \infty$, poiché altrimenti l'enunciato segue dalla proposizione precedente.

Sia $n = \text{cd}_p k$ e sia A un G -modulo. Se indichiamo con T il sottomodulo di torsione di A , si ha la successione esatta

$$0 \rightarrow T \rightarrow A \rightarrow A/T \rightarrow 0,$$

dove A/T è un G -modulo privo di torsione. Otteniamo così una successione esatta lunga in coomologia

$$\cdots \rightarrow H^r(G, T) \rightarrow H^r(G, A) \rightarrow H^r(G, A/T) \rightarrow H^{r+1}(G, T) \rightarrow \cdots.$$

Se mostriamo che la componente di torsione p -primaria dei gruppi $H^r(G, A/T)$ è nulla per $r > n + 1$, allora dalla successione si avrà $H^r(G, A) = 0$ per $r > n + 1$ e quindi $\text{scd}_p k \leq n + 1$. Poniamo $B = A/T$. Dal momento che B è libero da torsione, si ha la successione esatta

$$0 \rightarrow B \xrightarrow{p} B \rightarrow B/pB \rightarrow 0,$$

da cui si ricava la successione in coomologia

$$\cdots \rightarrow H^{r-1}(G, B/pB) \rightarrow H^r(G, B) \xrightarrow{p} H^r(G, B) \rightarrow H^r(G, B/pB) \rightarrow \cdots.$$

Poiché B/pB è un G -modulo di p -torsione, $H^i(G, B/pB) = 0$ per $i > n$, e dalla successione precedente otteniamo che la moltiplicazione per p su $H^r(G, B)$ è un isomorfismo per $r > n + 1$, e questo prova che la componente di torsione p -primaria di $H^r(G, B)$ è nulla per ogni $r > n + 1$.

Infine prendendo l'estremo superiore su p , troviamo

$$\text{scd } k \leq \text{cd } k + 1. \quad \square$$

DEFINIZIONE 3.1.4. Diciamo che un campo k ha *dimensione algebrica* minore o uguale a 1, e scriviamo $\dim k \leq 1$, se vale una delle seguenti condizioni equivalenti:

1. $\text{cd } k \leq 1$ e se $\text{char } k = p > 0$, allora la componente di torsione p -primaria di $\text{Br}(k')$ è nulla per tutte le estensioni separabili $k \subset k'$;
2. $\text{Br}(k') = 0$ per ogni estensione separabile $k \subset k'$;
3. se $k \subset K$ è un'estensione separabile e $K \subset L$ è un'estensione finita e di Galois, l'applicazione norma $N_{L/K}: L^* \rightarrow K^*$ è suriettiva.

(La dimostrazione dell'equivalenza di questi fatti si può trovare in Shatz [24, IV.3.32]).

Se $k \subset k'$ è un'estensione separabile e $\dim k \leq 1$, dalla definizione segue facilmente che $\dim k' \leq 1$.

PROPOSIZIONE 3.1.5. *Se k è un campo perfetto, allora*

$$\text{cd } k \leq 1 \iff \dim k \leq 1.$$

Dimostrazione. Nel caso in cui k ha caratteristica 0, l'equivalenza coincide con la definizione. Se $\text{char } k = p > 0$, tuttavia la chiusura separabile k_s di k coincide con la sua chiusura algebrica per cui la mappa

$$\psi: k_s^* \rightarrow k_s^*, \quad a \mapsto a^p$$

è un isomorfismo. Allora considerando la successione esatta

$$0 \rightarrow k_s^* \xrightarrow{\psi} k_s^* \rightarrow \text{coker } \psi \rightarrow 0$$

e la corrispondente successione in coomologia, tenendo conto che $\text{coker } \psi = 0$, si ricava che la mappa

$$\text{Br}(k) \xrightarrow{p} \text{Br}(k)$$

è un isomorfismo, e dunque la componente di torsione p -primaria di $\text{Br}(k)$ è nulla. \square

DEFINIZIONE 3.1.6. Un campo k ha la *proprietà C_r* se ogni polinomio omogeneo $f(x_1, \dots, x_n)$ di grado d a coefficienti in k , con $n > d^r$, ha una radice non banale in k . Un campo con la proprietà C_1 si dice *quasi-algebricamente chiuso*.

Possiamo interpretare la proprietà C_r come una misura di quanto un campo è lontano dall'essere algebricamente chiuso, infatti si può mostrare che per un campo k avere la proprietà C_0 è equivalente a essere algebricamente chiuso.

Vedremo nel seguito che questi due concetti, essere quasi-algebricamente chiuso e avere dimensione algebrica minore o uguale a 1, a priori indipendenti l'uno dall'altro, sono in realtà collegati.

LEMMA 3.1.7 (Artin, Lang, Nagata). *Sia k un campo con la proprietà C_r , e siano f_1, \dots, f_s polinomi omogenei di grado d in n variabili comuni. Se $n > sd^r$, allora esiste una radice comune non banale in k .*

Dimostrazione. Si veda Shatz [24, IV.3.7]. □

PROPOSIZIONE 3.1.8. *Siano k un campo e $k \subset K$ un'estensione algebrica. Valgono i seguenti fatti:*

1. *se k è C_r , anche K lo è;*
2. *se k è quasi-algebricamente chiuso e $K \subset L$ è un'estensione finita, allora $N_{L/k}(L^*) = K^*$.*

Dimostrazione. Consideriamo un polinomio omogeneo $f(x_1, \dots, x_n)$ di grado d in n variabili su K , e supponiamo $n > d^r$. I coefficienti di f sono contenuti in un'estensione finita di k , per cui possiamo assumere che $k \subset K$ sia finita. Scegliamo una base $\{e_1, \dots, e_s\}$ di K su k , introduciamo dei simboli y_{ij} per $i = 1, \dots, n$ e $j = 1, \dots, s$, e scriviamo

$$x_i = \sum_{j=1}^s y_{ij} e_j.$$

Allora sostituendo si ha

$$f(x_1, \dots, x_n) = f_1(y_{ij})e_1 + \dots + f_s(y_{ij})e_s,$$

dove ogni f_j è un polinomio omogeneo su k di grado d in ns variabili. Dal momento che $ns > sd^r$, per il lemma precedente i polinomi f_j hanno una radice comune non banale in k , e quindi f ha una radice non banale in K . Questo conclude la dimostrazione della prima parte.

Supponiamo ora che k sia C_1 , allora per quanto appena visto anche K è C_1 . Possiamo così assumere che $k = K$ e di conseguenza che $k \subset L$ sia finita. Sia $a \in k^*$, e scriviamo l'equazione

$$N_{L/k}(x) = ax_0^d,$$

dove d è il grado dell'estensione $k \subset L$. Se scegliamo una base $\{e_1, \dots, e_d\}$ di L su k , allora

$$x = \sum_{i=1}^d x_i e_i$$

e $N_{L/k}(x) - ax_0^d$ diventa un polinomio omogeneo di grado d nelle variabili x_0, x_1, \dots, x_d . Per ipotesi questo polinomio ha una radice $(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_d) \in k^{d+1}$ non banale. Inoltre osserviamo che se $\alpha_i = 0$ per $i = 1, \dots, d$ allora anche α_0 deve essere zero, per cui almeno uno degli α_i è non nullo, con $i \in \{1, \dots, d\}$, quindi $N_{L/k}(\alpha_1, \dots, \alpha_d) \neq 0$ e $\alpha_0 \neq 0$. Per finire si ha

$$N_{L/k}\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_0}, \dots, \frac{\alpha_d}{\alpha_0}\right) = a. \quad \square$$

COROLLARIO 3.1.9. *Ogni campo quasi-algebricamente chiuso ha dimensione algebrica minore o uguale a 1.*

Per completezza diciamo che esiste un esempio, dovuto ad Ax, di un campo che ha dimensione algebrica minore o uguale a 1, ma non è C_r per nessun $r \geq 0$ (si vedano Ax [6] e Shatz [24, IV.5]).

3.2 ALCUNI RISULTATI CLASSICI

Per concludere questa parte sulla coomologia di Galois e la teoria dei campi vediamo quattro risultati classici. I primi tre forniscono degli esempi di campi quasi-algebricamente chiusi, mentre l'ultimo teorema ci dà una stima di come varia la dimensione coomologica di un campo per estensioni non necessariamente algebriche.

DEFINIZIONE 3.2.1. Sia k un campo. Un *campo di funzioni* K di dimensione n su k è il campo delle funzioni razionali di una varietà algebrica su k di dimensione n .

TEOREMA 3.2.2 (Tsen). *Sia K un campo di funzioni di dimensione 1 su un campo algebricamente chiuso k . Allora K è quasi-algebricamente chiuso.*

Dimostrazione. Possiamo assumere, senza perdere di generalità, che il campo K sia il campo delle funzioni razionali in una variabile su k , cioè $K = k(t)$, poiché la proprietà C_r si conserva per le estensioni algebriche. Sia $f(x_1, \dots, x_n)$ un polinomio omogeneo di grado d a coefficienti in $k(t)$, con $n > d$. A meno di moltiplicare per un denominatore comune, possiamo supporre che f abbia i coefficienti in $k[t]$. Introduciamo delle nuove indeterminate $y = \{y_{ij}\}$, con $i = 0, 1, \dots, s$ e $j = 1, \dots, n$, e scriviamo

$$x_i = \sum_{j=0}^s y_{ij} t^j.$$

Allora il polinomio f diventa

$$f(x_1, \dots, x_n) = f_0(y) + f_1(y)t + \dots + f_{ds+r}(y)t^{ds+r},$$

dove ogni $f_h(y)$ è un polinomio omogeneo a coefficienti in k di grado d nelle $n(s+1)$ variabili y_{ij} , mentre r è dovuto al fatto che i coefficienti di f sono polinomi in t . Il sistema di equazioni

$$f_0(y) = \cdots = f_{ds+r}(y) = 0,$$

per s sufficientemente grande, definisce una varietà proiettiva in $\mathbb{P}_k^{n(s+1)-1}$. Allora ogni componente irriducibile di questa varietà ha dimensione maggiore o uguale a $n(s+1) - (ds+r+1)$. Siccome $n > d$, per s abbastanza grande questa varietà proiettiva ha dei punti razionali su k (poiché k è algebricamente chiuso). Un siffatto punto corrisponde a una radice comune non banale delle f_h , e dunque a una radice non banale di f in $k(t)$. \square

Più in generale, Lang ha mostrato che se K è un campo di funzioni in s variabili su un campo k con la proprietà C_r , allora K è C_{r+s} (Lang [17]).

TEOREMA 3.2.3 (Chevalley). *Ogni campo finito è quasi-algebricamente chiuso.*

Dimostrazione. Siano k un campo finito e f un polinomio omogeneo di grado d in $n > d$ variabili a coefficienti in k . Denotiamo con $N(f)$ il numero di radici di f in k compresa la radice banale, per cui notiamo che $N(f) > 0$. Vogliamo provare che se $\text{char } k = p > 0$, allora p divide $N(f)$, e quindi esiste una radice non banale di f in k .

Ogni elemento non nullo di k è una radice $(q-1)$ -esima dell'unità, dove q è la cardinalità di k . Se $x = (x_1, \dots, x_n) \in k^n$, allora $f(x) \in k$ e di conseguenza

$$1 - f(x)^{q-1} = \begin{cases} 0 & \text{se } f(x) \neq 0 \\ 1 & \text{se } f(x) = 0. \end{cases}$$

Ne segue che

$$\begin{aligned} N(f) &= \sum_{x \in k^n} (1 - f(x)^{q-1}) \\ &= \sum_{x \in k^n} 1 - \sum_{x \in k^n} f(x)^{q-1} \\ &\equiv - \sum_{x \in k^n} f(x)^{q-1} \quad (\text{modulo } p). \end{aligned}$$

Il polinomio $f(x)^{q-1}$ è omogeneo di grado $d(q-1)$, ed è quindi combinazione lineare su k di monomi della forma $x_1^{u_1} \cdots x_n^{u_n}$, con

$\sum_{i=1}^n u_i = (q-1)d$. Sommando i valori di un monomio di questo tipo su tutte le n -uple di k^n , si ha

$$\sum_{x \in k^n} x_1^{u_1} \cdots x_n^{u_n} = \sum_{x \in k^n} \prod_{j=1}^n x_j^{u_j} = \prod_{j=1}^n \sum_{x_j \in k} x_j^{u_j}.$$

Osserviamo che i termini con $x_j = 0$ non contribuiscono alla somma $\sum_{x_j \in k} x_j^{u_j}$, quindi questa è una somma di radici $(q-1)$ -esime dell'unità. Di conseguenza

$$x_j^{u_j} = \begin{cases} 1 & \text{se } u_j = h(q-1), h \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

ossia

$$\sum_{x_j \in k} x_j^{u_j} = \begin{cases} q-1 & \text{se } u_j = h(q-1), h \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Allora nella sommatoria su tutte le n -uple si ha

$$\sum_{x \in k^n} x_1^{u_1} \cdots x_n^{u_n} = \prod_{j=1}^n \psi(u_j),$$

dove

$$\psi(u_j) = \begin{cases} q-1 & \text{se } u_j = h(q-1), h \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Sappiamo che $\sum_{j=1}^n u_j = d(q-1) < n(q-1)$, quindi almeno uno degli u_j non deve essere un multiplo di $q-1$, ma allora esiste j per cui $\psi(u_j) = 0$ e perciò $\sum_{x \in k^n} x_1^{u_1} \cdots x_n^{u_n} = 0$. In definitiva si ha

$$N(f) \equiv - \sum_{x \in k^n} f(x)^{q-1} = 0 \quad (\text{modulo } p). \quad \square$$

Possiamo notare che il piccolo teorema di Wedderburn è un corollario immediato di questo teorema, poiché se D è un anello di divisione finito, il suo centro sarà un campo finito k , che quindi ha dimensione algebrica 1. In particolare $\text{Br}(k) = 0$ e dunque $D = k$ (in quanto per la proposizione 2.2.2 in ogni classe di equivalenza c'è un unico k -corpo a meno di isomorfismi).

TEOREMA 3.2.4 (Lang). *Sia L un campo completo rispetto a una valutazione discreta, con campo dei residui algebricamente chiuso, e sia $L' \subset L$ un sottocampo denso di L tale che l'estensione $L' \subset L$ è regolare (cioè L' è algebricamente chiuso in L , e ogni estensione intermedia finitamente generata è separabilmente generata). Allora L' è quasi-algebricamente chiuso. In*

particolare L è quasi-algebricamente chiuso.

Dimostrazione. Si veda Shatz [24, IV.3.27]. \square

LEMMA 3.2.5 (Teorema della torre). *Siano G un gruppo profinito e H un sottogruppo normale chiuso di G . Allora*

$$\text{cd}_p G \leq \text{cd}_p H + \text{cd}_p G/H,$$

per ogni numero primo p .

Dimostrazione. Consideriamo la successione spettrale di Hochschild-Serre

$$H^q(G/H, H^r(H, A)) \Rightarrow H^{q+r}(G, A),$$

dove A è un G -modulo di torsione.

Supponiamo $\text{cd}_p H = n < \infty$ e $\text{cd}_p G/H = m < \infty$ (altrimenti non c'è niente da dimostrare). Allora vediamo che la componente di torsione p -primaria dei gruppi $E_2^{q,r}$ è nulla non appena $q > m$ oppure $r > n$, e di conseguenza anche la componente di torsione p -primaria di $E_\infty^{q,r}$ è nulla se $q > m$ oppure $r > n$. Siano ora q e r tali che $q + r > m + n$, vogliamo mostrare che $H^{q+r}(G, A)_p = 0$. Scriviamo la filtrazione

$$0 = H_{q+r+1}^{q+r} \subset H_{q+r}^{q+r} \subset \dots \subset H_1^{q+r} \subset H_0^{q+r} = H^{q+r}(G, A)$$

con $H_s^{q+r}/H_{s+1}^{q+r} \cong E_\infty^{s, q+r-s}$. Osserviamo che se $s > m$, allora la componente p -primaria di $E_\infty^{s, q+r-s}$ è nulla; d'altronde se $s \leq m$, si ha

$$q + r - s > m + n - s \geq n$$

e quindi la componente p -primaria di $E_\infty^{s, q+r-s}$ è ancora nulla. Perciò guardando le componenti di torsione p -primarie dei gruppi H_s^{q+r} , risulta che queste sono nulle e in particolare $H^{q+r}(G, A)_p = 0$. \square

TEOREMA 3.2.6 (Tate). *Siano k un campo perfetto e $k \subset K$ un'estensione di grado di trascendenza n . Allora per ogni numero primo p si ha*

$$\text{cd}_p K \leq n + \text{cd}_p k,$$

e l'uguaglianza vale se K è un campo di funzioni su k , $\text{char } k \neq p$ e $\text{cd}_p k$ è finita.

Dimostrazione. Mostriamo solo la prima parte; per una dimostrazione del caso in cui vale l'uguaglianza si veda Shatz [24, IV.4.28].

Sappiamo che K è algebrico su un'estensione puramente trascendente di k . Poiché la dimensione coomologica al più decresce per le estensioni algebriche, possiamo assumere che K sia un'estensione puramente trascendente di k . Inoltre basta provare il teorema nel caso $n = 1$. Infatti facendo un'induzione sul grado di trascendenza di K su k , se $K = k(x_1, \dots, x_n, x_{n+1})$, allora per ipotesi induttiva

$$\text{cd}_p K \leq 1 + \text{cd}_p k(x_1, \dots, x_n) \leq 1 + n + \text{cd}_p k.$$

Siano quindi \bar{k} una chiusura algebrica di k e \bar{K} una chiusura algebrica di $K = k(t)$. Allora si ha il seguente diagramma

$$\begin{array}{ccccc} \bar{k} & \text{-----} & \bar{k}(t) & \xrightarrow{H} & \bar{K} \\ G_k \downarrow & & G_k \downarrow & \searrow G_K & \\ k & \text{-----} & k(t) & & \end{array}$$

dove abbiamo posto $G_k = \text{Gal}(\bar{k}/k) = \text{Gal}(\bar{k}(t)/k(t))$, $G_K = \text{Gal}(\bar{K}/k(t))$ e $H = \text{Gal}(\bar{K}/\bar{k}(t))$. Osserviamo che $\bar{k}(t)$ è un campo di funzioni con campo dei residui algebricamente chiuso, dunque per il teorema di Tsen $\text{cd } H \leq 1$. D'altra parte $G_k \cong G_K/H$ e per il teorema della torre

$$\text{cd}_p K \leq \text{cd}_p H + \text{cd}_p k \leq 1 + \text{cd}_p k,$$

per ogni numero primo p . □

4

COOMOLOGIA ÉTALE

In questa sezione vogliamo introdurre la nozione di morfismo étale tra schemi, che ci permetterà di definire una topologia più fine di quella di Zariski. Questo sarà il punto di partenza per tutta una teoria che generalizza le costruzioni classiche di fasci su schemi e di gruppi di coomologia a coefficienti in un fascio. Tutti gli schemi coinvolti sono da considerarsi localmente noetheriani.

Da notare che nel seguito utilizzeremo una nozione più generale di limite, di cui diamo una breve descrizione (per maggiori dettagli e per le dimostrazioni dei risultati enunciati si veda Artin [3, I.1]). Consideriamo due categorie \mathcal{I} e \mathcal{C} , e per ogni oggetto $M \in \mathcal{C}$ definiamo il funtore costante h_M tale che $h_M(i) = M$ per ogni $i \in \mathcal{I}$ e $h_M(i \rightarrow j) = \text{id}_M$ per ogni freccia $i \rightarrow j$.

DEFINIZIONE 4.1. Dato un funtore covariante $F: \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{C}$, un oggetto $M \in \mathcal{C}$ si dice un *limite diretto* di F , e si scrive $M = \varinjlim F$ se esiste una trasformazione naturale $\psi: F \rightarrow h_M$ tale che per ogni trasformazione naturale $\psi': F \rightarrow h_N$ esiste un'unica trasformazione naturale $\phi: h_M \rightarrow h_N$ con $\psi' = \phi \circ \psi$.

DEFINIZIONE 4.2. Una categoria \mathcal{I} si dice *filtrata* se valgono le seguenti proprietà:

1. per ogni coppia di frecce $\alpha_1: i \rightarrow j_1$ e $\alpha_2: i \rightarrow j_2$ esistono delle frecce $\beta_1: j_1 \rightarrow k$ e $\beta_2: j_2 \rightarrow k$ tali che $\beta_1 \circ \alpha_1 = \beta_2 \circ \alpha_2$;
2. per ogni coppia di frecce $\alpha_1, \alpha_2: i \rightarrow j$ esiste una freccia $\beta: j \rightarrow k$ tale che $\beta \circ \alpha_1 = \beta \circ \alpha_2$;
3. per ogni coppia di oggetti $i, j \in \mathcal{I}$ esistono delle frecce

$$i \rightarrow i_1 \leftarrow j_1 \rightarrow i_2 \leftarrow j_2 \rightarrow \cdots \leftarrow j.$$

PROPOSIZIONE 4.3. Siano \mathcal{I} una categoria filtrata e $F: \mathcal{I} \rightarrow \mathbf{Sets}$ un funtore covariante. Poniamo $X_i = F(i)$ per ogni $i \in \mathcal{I}$, e indichiamo con X l'unione disgiunta degli X_i . Per ogni $x_i \in X_i$ e $x_j \in X_j$ scriviamo $x_i \sim x_j$ se esistono delle frecce $i \rightarrow k$ e $j \rightarrow k$ tali che

$$F(i \rightarrow k)(x_i) = F(j \rightarrow k)(x_j) \in X_k.$$

Allora si ha

1. \sim è una relazione di equivalenza su X e $X/\sim = \varinjlim X_i$;
2. per ogni coppia $x_i \in X_i, x_j \in X_j$ esiste un oggetto $k \in \mathcal{I}$ tale che x_i e x_j sono equivalenti a elementi di X_k ;
3. per ogni $x_i, y_i \in X_i, x_i \sim y_i$ se e solo se esiste una freccia $i \rightarrow k$ tale che

$$F(i \rightarrow k)(x_i) = F(i \rightarrow k)(y_i) \in X_k.$$

COROLLARIO 4.4. Siano \mathcal{I} una categoria filtrata e $F: \mathcal{I} \rightarrow \mathbf{Ab}$ un funtore covariante. Se $G: \mathbf{Ab} \rightarrow \mathbf{Sets}$ è il funtore dimenticante, allora $\varinjlim F$ esiste e

$$G\left(\varinjlim F\right) = \varinjlim(G \circ F).$$

4.1 I MORFISMI ÉTALE

DEFINIZIONE 4.1.1. Un omomorfismo di anelli $f: A \rightarrow B$ si dice *piatto* se B è piatto come A -modulo, cioè se il funtore $- \otimes_A B$ dalla categoria degli A -moduli in quella dei B -moduli è esatto.

DEFINIZIONE 4.1.2. Dati due schemi X e Y , un morfismo di schemi $f: Y \rightarrow X$ si dice *étale* se sono verificate le seguenti condizioni:

1. f è localmente di tipo finito,
2. f è piatto, cioè per tutti i punti $y \in Y$, l'omomorfismo indotto $\mathcal{O}_{X,f(y)} \rightarrow \mathcal{O}_{Y,y}$ è piatto,
3. f è non ramificato, cioè per tutti i punti $y \in Y$, l'immagine dell'ideale massimale \mathfrak{m} di $\mathcal{O}_{X,f(y)}$ genera l'ideale massimale \mathfrak{n} di $\mathcal{O}_{Y,y}$, e l'estensione di campi $\mathcal{O}_{X,f(y)}/\mathfrak{m} \rightarrow \mathcal{O}_{Y,y}/\mathfrak{n}$ è finita e separabile.

DEFINIZIONE 4.1.3. Dato uno schema X e un campo separabilmente chiuso k , diciamo che $\text{Spec } k$ è un *punto geometrico* di X se esiste un morfismo di schemi $\text{Spec } k \rightarrow X$, ossia se esiste un punto $x \in X$ tale che k è la chiusura separabile del campo dei residui $k(x)$.

PROPOSIZIONE 4.1.4. Sia $f: Y \rightarrow X$ un morfismo localmente di tipo finito. Sono equivalenti:

1. f è non ramificato;
2. per tutti i punti $x = \text{Spec } k(x)$ di X , la fibra

$$Y \times_X \text{Spec } k(x) \rightarrow \text{Spec } k(x)$$

è non ramificata;

3. per tutti i punti geometrici $\text{Spec } k \rightarrow X$ (dove k è un campo separabilmente chiuso), il morfismo $Y \times_X \text{Spec } k \rightarrow \text{Spec } k$ è non ramificato;

4. per ogni punto $x = \text{Spec } k(x)$ di X , si ha

$$Y \times_X \text{Spec } k(x) = \bigsqcup \text{Spec } k_i,$$

con k_i estensione finita e separabile di $k(x)$ per ogni i .

Dimostrazione. Osserviamo che se $x \in X$ e $y \in Y \times_X \text{Spec } k(x)$, allora si ha

$$\mathcal{O}_{Y,y}/\mathfrak{m}_{\mathcal{O}_{Y,y}} \cong \mathcal{O}_{f^{-1}(x),y},$$

da cui segue facilmente che (1) \iff (2).

L'equivalenza (2) \iff (4) è immediata dalla definizione di morfismo non ramificato.

Mostriamo ora che (2) \implies (3). Sia $y \in Y \times_X \text{Spec } k(x)$ e supponiamo che

$$\bar{f}: Y \times_X \text{Spec } k(x) \rightarrow \text{Spec } k(x)$$

sia non ramificato per ogni $x \in X$, per cui $\mathcal{O}_{Y \times_X \text{Spec } k(x),y} = k(y)$, e $k(x) \subset k(y)$ è un'estensione finita e separabile. Inoltre se k è una chiusura separabile di $k(x)$, ossia $\bar{x} = \text{Spec } k$ è un punto geometrico di X , allora

$$Y \times_X \text{Spec } k = (Y \times_X \text{Spec } k(x)) \times_{\text{Spec } k(x)} \text{Spec } k$$

e per ogni punto $\bar{y} \in Y \times_X \text{Spec } k$,

$$\mathcal{O}_{Y \times_X \text{Spec } k, \bar{y}} = k(y) \otimes_{k(x)} k = k,$$

con $y \in Y \times_X \text{Spec } k(x)$ immagine di \bar{y} . Da questo segue che

$$Y \times_X \text{Spec } k \rightarrow \text{Spec } k$$

è non ramificato.

Infine vediamo l'ultima implicazione, (3) \implies (2). Prendiamo $x \in X$ e k una chiusura separabile di $k(x)$. Supponiamo che la fibra

$$Y \times_X \text{Spec } k \rightarrow \text{Spec } k$$

sia non ramificata, allora per ogni $\bar{y} \in Y \times_X \text{Spec } k$ si ha

$$\mathcal{O}_{Y \times_X \text{Spec } k, \bar{y}} = k(\bar{y}) = k.$$

D'altra parte se $y \in Y \times_X \text{Spec } k(x)$ è immagine di $\bar{y} \in Y \times_X \text{Spec } k$, abbiamo

$$k = \mathcal{O}_{Y \times_X \text{Spec } k, \bar{y}} = \mathcal{O}_{Y \times_X \text{Spec } k(x), y} \otimes_{k(x)} k,$$

da cui segue che $\mathcal{O}_{Y \times_X \text{Spec } k(x), y}$ è un campo ed è un'estensione finita e separabile di $k(x)$. \square

PROPOSIZIONE 4.1.5. *Valgono i seguenti fatti:*

1. ogni immersione aperta è un morfismo étale;
2. la composizione di due morfismi étale è étale;
3. un morfismo ottenuto per cambiamento di base da un morfismo étale è ancora étale.

Dimostrazione. Osserviamo che le immersioni aperte sono morfismi quasi-finiti. Inoltre se $f: U \hookrightarrow X$ è un'immersione aperta, allora per ogni punto $p \in U \subset X$, si ha $\mathcal{O}_{U,p} \cong \mathcal{O}_{X,p}$, per cui è chiaro che f è piatto e non ramificato.

Siano ora $f: Y \rightarrow X$ e $g: Z \rightarrow Y$ due morfismi étale. È immediato che la composizione $f \circ g$ è localmente di tipo finito. D'altra parte se $z \in Z$, si ha che l'omomorfismo

$$\mathcal{O}_{X, f(g(z))} \xrightarrow{f^\#} \mathcal{O}_{Y, g(z)} \xrightarrow{g^\#} \mathcal{O}_{Z, z}$$

è piatto in quanto composizione di omomorfismi piatti. Se indichiamo poi con \mathfrak{m}_X , \mathfrak{m}_Y e \mathfrak{m}_Z gli ideali massimali di $\mathcal{O}_{X, f(g(z))}$, $\mathcal{O}_{Y, g(z)}$ e $\mathcal{O}_{Z, z}$ rispettivamente, allora $g^\#(\mathfrak{m}_Y)\mathcal{O}_{Z, z} = \mathfrak{m}_Z$ e $f^\#(\mathfrak{m}_X)\mathcal{O}_{Y, g(z)} = \mathfrak{m}_Y$, per cui $g^\#(f^\#(\mathfrak{m}_X))\mathcal{O}_{Z, z} = \mathfrak{m}_Z$; d'altra parte per la proprietà delle torri di estensioni di campi

$$\mathcal{O}_{X, f(g(z))}/\mathfrak{m}_X \rightarrow \mathcal{O}_{Y, g(z)}/\mathfrak{m}_Y \rightarrow \mathcal{O}_{Z, z}/\mathfrak{m}_Z$$

è finita e separabile.

Infine sia $f: Y \rightarrow X$ un morfismo étale, e sia $g: Z \rightarrow X$ un morfismo di schemi qualunque. Si vede subito che il morfismo $h: Y \times_X Z \rightarrow Z$ è localmente di tipo finito. Per provare che è piatto, notiamo che se $A \rightarrow B$ è un omomorfismo di anelli piatto e $A \rightarrow A'$ è un altro omomorfismo di anelli, allora per ogni A' -modulo M esiste un isomorfismo canonico

$$(B \otimes_A A') \otimes_{A'} M \cong B \otimes_A M.$$

Osserviamo poi che per la proposizione precedente basta provare che il morfismo ottenuto per cambiamento di base è non ramificato nel caso che Y e X siano spettri di campi, diciamo $X = \text{Spec } k$, $Y = \text{Spec } k'$, con $k \subset k'$ estensione finita e separabile di campi. Inoltre trattandosi di una questione locale, possiamo supporre che Z sia affine, $Z = \text{Spec } A$ e A sia una k -algebra finita. Allora la tesi segue da risultati di algebra commutativa (Atiyah e Macdonald [5, III.2]). \square

4.2 ANELLI HENSELIANI

DEFINIZIONE 4.2.1. Un anello locale A è *henseliano* se ogni A -algebra finita B è un prodotto diretto di anelli locali.

TEOREMA 4.2.2. Sia A un anello locale con campo dei residui k , e sia x il punto chiuso di $X = \text{Spec } A$. Sono equivalenti:

1. A è henseliano;
2. se $f: Y \rightarrow X$ è étale ed esiste un punto $y \in Y$ tale che $f(y) = x$ e $k(y) = k(x)$, allora f ha una sezione $s: X \rightarrow Y$;
3. sia $\pi: A \rightarrow k$ la proiezione, e sia $p(T) \in A[T]$ un polinomio monico; se $\pi(p) \in k[T]$ si fattorizza come $\pi(p) = q_0 r_0$ con $q_0, r_0 \in k[T]$ polinomi monici e coprimi, allora p si fattorizza come $p = qr$ con $q, r \in A[T]$ monici e $\pi(q) = q_0$, $\pi(r) = r_0$.

Dimostrazione. Mostriamo che (1) \Rightarrow (2). Osserviamo innanzi tutto che (a meno di restringerci a un aperto) possiamo ridurci al caso in cui $Y = \text{Spec } B$, dove B è una A -algebra finita. Per ipotesi si ha che $B/\mathfrak{m}_B \cong k$, e dalla proprietà degli A -moduli piatti finitamente generati (Milne [19, I.2.9]) segue che B è un A -modulo libero. Inoltre $B \otimes_A k = B/\mathfrak{m}_B = k$, per cui B ha rango 1 ed è quindi isomorfo ad A .

Verifichiamo ora l'implicazione (2) \Rightarrow (3). Scriviamo

$$p(T) = T^n + a_{n-1}T^{n-1} + \cdots + a_0,$$

e consideriamo il sistema di equazioni

$$\begin{cases} X_0 Y_0 = 1, \\ X_0 Y_1 + X_1 Y_0 = a_1, \\ \dots \\ X_{r-1} Y_s + Y_{s-1} = a_{n-1}, \\ Y_s = a_0, \end{cases}$$

dove $r = \deg q_0$ e $s = n - r$. Osserviamo che $(b_0, \dots, b_{r-1}; c_0, \dots, c_s)$ è una soluzione del sistema se e solo se

$$p(T) = (T^r + b_{r-1}T^{r-1} + \dots + b_0)(c_sT^s + \dots + c_0).$$

Inoltre il determinante della matrice Jacobiana associata al sistema coincide con il risultante $\text{res}(q, r)$ dei polinomi $q = T^r + \dots + b_0$ e $r = c_sT^s + \dots + c_0$. Notiamo che $\text{res}(q_0, r_0) \neq 0$ dal momento che q_0 e r_0 sono coprimi. Indichiamo con B il quoziente dell'algebra $A[X_i, Y_j]$ per l'ideale generato dai polinomi corrispondenti alle equazioni del sistema. Si può provare che esiste $b \in B$ tale che la localizzazione B_b è étale su A (Milne [19, I.4.2]). A questo punto applichiamo il punto (2) alla mappa $\text{Spec } B_b \rightarrow \text{Spec } A$ e otteniamo che la soluzione in k^{n+1} del sistema, corrispondente ai polinomi q_0 e r_0 , si solleva a una soluzione in A^{n+1} che corrisponde ai polinomi q e r cercati.

Infine vediamo che (3) \Rightarrow (1). Sia B una A -algebra finita. Per il teorema del going-up ogni ideale massimale di B si contrae all'ideale massimale \mathfrak{m} di A , quindi B è un anello locale se e solo se $B/\mathfrak{m}B$ lo è. Supponiamo $B = A[T]/(p)$ con $p \in A[T]$ monico. Se $\pi(p)$ è una potenza di un polinomio irriducibile, allora $B/\mathfrak{m}B = k[T]/(\pi(p))$ è locale, e di conseguenza anche B è locale. Altrimenti per il punto (3), si ha che $p = qr$ con q e r monici, coprimi e non costanti, da cui si ricava che $B \cong A[T]/(q) \times A[T]/(r)$ e possiamo iterare il procedimento fino a ottenere la decomposizione in anelli locali. Nel caso generale, se B non è locale esiste $b \in B$ la cui immagine \bar{b} in $B/\mathfrak{m}B$ è un idempotente non banale. Sia $p \in A[T]$ un polinomio monico tale che $p(b) = 0$, e sia $C = A[T]/(p)$. Consideriamo la mappa $\psi: C \rightarrow B$ che manda T in b . Per quanto appena visto esiste un idempotente $c \in C$ tale che l'immagine di $\psi(c)$ in $B/\mathfrak{m}B$ coincide con \bar{b} . Ne segue che $e = \psi(c)$ è un idempotente non banale di B . Inoltre si ha la decomposizione $B = Be \times B(1 - e)$ e il procedimento può essere iterato. \square

PROPOSIZIONE 4.2.3. *Ogni anello locale completo A è henseliano.*

Dimostrazione. Sia $f: \text{Spec } B \rightarrow \text{Spec } A$ un morfismo étale, e supponiamo che esista $y \in \text{Spec } B$ tale che $k(y) = k$ e $f(y) = x$, dove $x = \text{Spec } k$ è il punto chiuso di $\text{Spec } A$. Basta mostrare che esiste un morfismo $s: \text{Spec } A \rightarrow B$ tale che $f \circ s = \text{id}_{\text{Spec } A}$. Trattandosi di schemi affini, possiamo limitarci a considerare la mappa $f^\sharp: A \rightarrow B$ tra le sezioni globali e mostrare che esiste $s^\sharp: B \rightarrow A$ tale che $s^\sharp \circ f^\sharp = \text{id}_A$.

Sia \mathfrak{m} l'ideale massimale di A , e scriviamo $A_r = A/\mathfrak{m}^{r+1}$. Vogliamo provare che esistono delle sezioni compatibili $s_r: B \rightarrow A_r$, poiché queste indurranno una sezione $s^\sharp: B \rightarrow \varprojlim A_r = A$. Procediamo per induzione su r . Per ipotesi esiste un omomorfismo $s_0: B \rightarrow A_0 = k$ che corrisponde all'inclusione $y \hookrightarrow \text{Spec } B$ ed è una sezione. Sia ora

$r > 0$, per ipotesi induttiva esiste una sezione $s_{r-1}: B \rightarrow A_{r-1}$. Se $\pi_r: A \rightarrow A_r$ è la proiezione, allora abbiamo che $A_{r-1} \cong A_r/\pi_r(\mathfrak{m})$ e $\pi_r(\mathfrak{m})$ è un ideale nilpotente di A_r . Da questo segue che la sezione s_{r-1} si solleva a una sezione $s_r: B \rightarrow A_r$ tale che il diagramma

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{s_{r-1}} & A_{r-1} \\ f \uparrow & \searrow s_r & \uparrow \\ A & \xrightarrow{\pi_r} & A_r \end{array}$$

commuta (si veda Milne [19, I.3.22]). □

Dal momento che ogni anello locale A è un sottoanello del suo completamento \widehat{A} , che è henseliano, possiamo definire l'henselianizzazione di A come il più piccolo anello henseliano che contiene A . Più precisamente diciamo che un anello henseliano A^h è l'henselianizzazione di A se esiste un omomorfismo locale $\alpha: A \rightarrow A^h$, e per ogni anello henseliano B e omomorfismo locale $\beta: A \rightarrow B$, esiste un unico omomorfismo locale $\gamma: A^h \rightarrow B$ tale che $\beta = \gamma \circ \alpha$.

Si può dimostrare che se \mathfrak{m}^h è l'ideale massimale di A^h , allora

$$(A^h, \mathfrak{m}^h) = \varinjlim (B, \mathfrak{q}),$$

dove il limite è su tutte le coppie (B, \mathfrak{q}) , in cui $f: A \rightarrow B$ è una A -algebra étale, e $\mathfrak{q} \in \text{Spec } B$ è tale che $f^{-1}(\mathfrak{q}) = \mathfrak{m}$ e $k(\mathfrak{q}) = k$ (si veda Raynaud [21, VIII.1]).

DEFINIZIONE 4.2.4. Un anello henseliano A si dice *strettamente henseliano* se il campo dei residui è separabilmente chiuso.

Dato un anello locale A si può definire anche l'henselianizzazione stretta di A come una coppia (A^{sh}, α) , dove A^{sh} è un anello strettamente henseliano e $\alpha: A \rightarrow A^{\text{sh}}$ è un omomorfismo locale tale che se $\beta: A \rightarrow B$ è un omomorfismo locale con B anello strettamente henseliano, allora esiste un omomorfismo locale $\gamma: A^{\text{sh}} \rightarrow B$ tale che $\beta = \gamma \circ \alpha$. Inoltre γ è univocamente determinato dalla mappa indotta sui campi dei residui.

Fissata una chiusura separabile k_s del campo dei residui k di A , si dimostra che

$$A^{\text{sh}} = \varinjlim B,$$

dove il limite è su tutti i diagrammi commutativi

$$\begin{array}{ccc} B & \longrightarrow & k_s \\ \uparrow & \nearrow & \\ A & & \end{array}$$

con $\text{Spec } B \rightarrow \text{Spec } A$ étale (si veda Raynaud [21, VIII.2]).

Sia ora X uno schema e $\bar{x} \rightarrow X$ un punto geometrico di X .

DEFINIZIONE 4.2.5. Definiamo l'*henselianizzazione stretta* di X nel punto \bar{x} ,

$$\mathcal{O}_{X,\bar{x}}^{\text{sh}} = \varinjlim \Gamma(U, \mathcal{O}_U),$$

dove il limite è su tutti i diagrammi commutativi

$$\begin{array}{ccc} \bar{x} & \longrightarrow & U \\ & \searrow & \downarrow \\ & & X \end{array}$$

con $U \rightarrow X$ étale (l'esistenza di questo limite è assicurata dal corollario 4.4, si veda Milne [19, II.2]).

4.3 LA TOPOLOGIA ÉTALE

Dato uno schema X , vogliamo definire una topologia sugli X -schemi il cui morfismo strutturale è étale di tipo finito. Questi schemi formano una sottocategoria piena della categoria (Sch/X) di tutti gli X -schemi, che indicheremo con $X_{\text{ét}}$. Osserviamo che i morfismi tra oggetti di $X_{\text{ét}}$ sono étale di tipo finito.

Dato un oggetto Y in $X_{\text{ét}}$, un aperto di Y sarà un morfismo étale di tipo finito $U \rightarrow Y$. Inoltre diremo che una famiglia $(U_i \xrightarrow{f_i} Y)_{i \in I}$ di morfismi étale di tipo finito è un ricoprimento di Y , se $Y = \cup_{i \in I} f_i(U_i)$. La categoria $X_{\text{ét}}$ è detta il *sito étale* su X .

Possiamo notare che la topologia definita dal sito étale, più comunemente detta *topologia étale* è più fine di quella di Zariski. Ad esempio se consideriamo il sito étale sullo spettro di un campo k , un aperto di $\text{Spec } k$ sarà un'unione finita di spettri di estensioni finite e separabili di k , mentre i soli aperti di Zariski sono il vuoto e $\text{Spec } k$.

Nel seguito quando menzioneremo morfismi étale faremo sempre riferimento a morfismi étale di tipo finito.

4.4 PREFASCI E FASCI

DEFINIZIONE 4.4.1. Dato uno schema X , un *prefascio* su $X_{\text{ét}}$ è un funtore controvariante $(X_{\text{ét}})^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Ab}$.

Quindi un prefascio P su $X_{\text{ét}}$ associa a ogni oggetto U in $X_{\text{ét}}$ un gruppo abeliano $P(U)$ (che a volte indicheremo con $\Gamma(U, P)$), e a ogni morfismo di X -schemi étale di tipo finito $f: U' \rightarrow U$ fa corrispondere

un omomorfismo di gruppi $P(f): P(U) \rightarrow P(U')$ (che denoteremo anche con $\text{res}_{U',U}$ e chiameremo qualche volta mappe di restrizione).

Con questa definizione, un morfismo $\phi: P \rightarrow P'$ di prefasci su $X_{\text{ét}}$ sarà semplicemente un morfismo di funtori. In particolare per ogni oggetto U in $X_{\text{ét}}$, si ha un omomorfismo $\phi(U): P(U) \rightarrow P'(U)$, e se $f: U' \rightarrow U$ è un morfismo étale di tipo finito, il diagramma

$$\begin{array}{ccc} P(U) & \xrightarrow{P(f)} & P(U') \\ \phi(U) \downarrow & & \downarrow \phi(U') \\ P'(U) & \xrightarrow{P'(f)} & P'(U') \end{array}$$

è commutativo. I prefasci e i morfismi di prefasci su $X_{\text{ét}}$ formano una categoria abeliana che denotiamo con $\mathbf{Presh}(X_{\text{ét}})$.

DEFINIZIONE 4.4.2. Un prefascio F su $X_{\text{ét}}$ è un *fascio* se soddisfa le seguenti condizioni:

1. se $s \in F(U)$ ed esiste un ricoprimento $(U_i \rightarrow U)_{i \in I}$ di U tale che $\text{res}_{U_i, U}(s) = 0$ per ogni i , allora $s = 0$;
2. se $(U_i \rightarrow U)_{i \in I}$ è un ricoprimento, e se la famiglia $(s_i \in F(U_i))_{i \in I}$ è tale che

$$\text{res}_{U_i \times_U U_j, U_i}(s_i) = \text{res}_{U_i \times_U U_j, U_j}(s_j)$$

per ogni i e j , allora esiste $s \in F(U)$ tale che $\text{res}_{U_i, U}(s) = s_i$ per ogni i .

Equivalentemente, un prefascio F è un fascio se la successione

$$F(U) \longrightarrow \prod_i F(U_i) \begin{array}{c} \xleftarrow{(\alpha_h)} \\ \xrightarrow{(\beta_j)} \end{array} \prod_{h,j} F(U_h \times_U U_j)$$

è esatta per ogni ricoprimento $(U_i \rightarrow U)_{i \in I'}$, dove gli omomorfismi $\alpha_h: F(U_h) \rightarrow F(U_h \times_U U_j)$ e $\beta_j: F(U_j) \rightarrow F(U_h \times_U U_j)$ corrispondono rispettivamente alle mappe $U_h \times_U U_j \rightarrow U_h$ e $U_h \times_U U_j \rightarrow U_j$.

Anche i fasci su $X_{\text{ét}}$ formano una categoria abeliana, che indichiamo con $\mathbf{Sh}(X_{\text{ét}})$, (un morfismo di fasci sarà semplicemente un morfismo di prefasci).

DEFINIZIONE 4.4.3. Sia P un prefascio su $X_{\text{ét}}$ e sia $\bar{x} \rightarrow X$ un punto geometrico di X . La *spiga* di P in \bar{x} è il gruppo abeliano $P_{\bar{x}} = \varinjlim P(U)$, dove il limite è fatto sui triangoli commutativi

$$\begin{array}{ccc} U & \longleftarrow & \bar{x} \\ \downarrow & \swarrow & \\ X & & \end{array}$$

con U étale su X (questo limite esiste poiché sono soddisfatte le ipotesi del corollario 4.4, si veda Milne [19, II.2]).

Sia $\pi: X' \rightarrow X$ un morfismo étale di tipo finito, allora π induce un funtore

$$\bar{\pi}: X'_{\text{ét}} \rightarrow X_{\text{ét}}$$

che associa a ogni oggetto U in $X_{\text{ét}}$ lo schema $U \times_X X'$.

Possiamo così definire il funtore

$$\pi_p: \mathbf{Presh}(X'_{\text{ét}}) \rightarrow \mathbf{Presh}(X_{\text{ét}}),$$

tale che $\pi_p P = P \circ \bar{\pi}$ per ogni prefascio P su $X'_{\text{ét}}$.

PROPOSIZIONE 4.4.4. Se $\pi: X' \rightarrow X$ è un morfismo étale di tipo finito ed F è un fascio su $X'_{\text{ét}}$, allora il prefascio $F \circ \bar{\pi}$ è un fascio su $X_{\text{ét}}$.

Dimostrazione. Sia $(U_i \rightarrow U)$ un ricoprimento in $X_{\text{ét}}$, allora $(U'_i \rightarrow U')$ è un ricoprimento in $X'_{\text{ét}}$, dove abbiamo posto

$$U'_i = U_i \times_X X' \quad \text{e} \quad U' = U \times_X X'.$$

Per ipotesi la successione

$$F(U') \longrightarrow \prod_i F(U'_i) \rightrightarrows \prod_{i,j} F(U'_i \times_{U'} U'_j)$$

è esatta. D'altra parte $U'_i \times_{U'} U'_j \cong (U_i \times_U U_j) \times_X X'$, quindi questa successione è isomorfa a

$$(F \circ \bar{\pi})(U) \longrightarrow \prod_i (F \circ \bar{\pi})(U_i) \rightrightarrows \prod_{i,j} (F \circ \bar{\pi})(U_i \times_U U_j),$$

dunque $F \circ \bar{\pi}$ è un fascio su $X_{\text{ét}}$. □

Osserviamo che dalla dimostrazione precedente si evince che il funtore π_p è esatto. Definiamo anche il funtore

$$\pi^p: \mathbf{Presh}(X_{\text{ét}}) \rightarrow \mathbf{Presh}(X'_{\text{ét}}),$$

tale che se $P \in \mathbf{Presh}(X_{\text{ét}})$ e U' è un oggetto in $X'_{\text{ét}}$ allora

$$(\pi^p(P))(U') = \varinjlim P(U),$$

dove il limite è su tutti i quadrati commutativi

$$\begin{array}{ccc} U' & \xrightarrow{g} & U \\ \downarrow & & \downarrow \\ X' & \xrightarrow{\pi} & X \end{array}$$

con $U \rightarrow X$ étale di tipo finito, e un morfismo tra due quadrati commutativi (g, U) e (g_1, U_1) è un morfismo di X -schemi $h: U \rightarrow U_1$ tale che $hg = g_1$ (questo limite esiste per il corollario 4.4, si veda Milne [19, II.2.3]). Si può verificare inoltre che π^p è aggiunto sinistro di π_p (Milne [19, II.2]), ed è perciò esatto a sinistra.

Vorremmo adesso definire, in analogia col caso classico, nuclei e immagini di morfismi di fasci. Notiamo che se $f: F \rightarrow F'$ è un morfismo di fasci, il nucleo di f (come morfismo di prefasci) è un fascio, mentre in generale l'immagine di f sarà solo un prefascio.

TEOREMA 4.4.5. *Dato un prefascio P su $X_{\text{ét}}$, esistono un fascio aP su $X_{\text{ét}}$ e un morfismo $\psi: P \rightarrow aP$ tali che per ogni morfismo ψ' da P in un fascio F esiste un unico morfismo $\phi: aP \rightarrow F$ tale che $\phi \circ \psi = \psi'$.*

Dimostrazione. Innanzi tutto osserviamo che se X è lo spettro di un campo separabilmente chiuso, allora ogni schema U étale e di tipo finito su X è unione disgiunta di un numero finito di copie di X , scriviamo $U = \sqcup_{i=1}^n X$. Perciò possiamo definire il fascio aP come

$$aP(U) = \prod_{i=1}^n P(X) = P(X)^n,$$

e la mappa

$$\psi(U): P(U) \rightarrow \prod_{i=1}^n P(X)$$

è data dai morfismi di restrizione.

Nel caso generale, per ogni punto $x \in X$ scegliamo un punto geometrico $u_x: \bar{x} \rightarrow X$ e poniamo $P_{\bar{x}}^* = a(u_x^p P)$, con a definito come sopra. Indichiamo con P^* il fascio $\prod_{x \in X} u_{x,p} P_{\bar{x}}^*$ e sia $\psi: P \rightarrow P^*$ la mappa indotta dalla composizione

$$P \rightarrow u_{x,p}(u_x^p P) \rightarrow u_{x,p}(P_{\bar{x}}^*),$$

dove le due mappe sono indotte per aggiunzione rispettivamente dall'identità $u_x^p P \rightarrow u_x^p P$ e da $u_x^p P \rightarrow a(u_x^p P) = P_{\bar{x}}^*$. Definiamo allora aP come l'intersezione di tutti i sottofasci di P^* contenenti $\psi(P)$. Si verifica direttamente dalla definizione che l'intersezione di una famiglia di sottofasci di un fascio è ancora un fascio, per cui $aP \in \mathbf{Sh}(X_{\text{ét}})$.

Infine per quanto riguarda la proprietà universale di aP si veda Milne [19, II.2.11]. \square

Grazie a questo teorema possiamo verificare che in $\mathbf{Sh}(X_{\text{ét}})$ esistono l'immagine e il conucleo di un morfismo di fasci f , e che questi corrispondono rispettivamente ai fasci associati a $\text{im}(f) \in \mathbf{Presh}(X_{\text{ét}})$ e a $\text{coker}(f) \in \mathbf{Presh}(X_{\text{ét}})$.

Si hanno così due funtori, l'inclusione

$$i: \mathbf{Sh}(X_{\text{ét}}) \rightarrow \mathbf{Presh}(X_{\text{ét}})$$

e il funtore

$$a: \mathbf{Presh}(X_{\text{ét}}) \rightarrow \mathbf{Sh}(X_{\text{ét}})$$

che associa a ogni prefascio P il fascio aP . Inoltre dal teorema precedente segue che a è un aggiunto sinistro di i .

TEOREMA 4.4.6. *Dato uno schema X , valgono i seguenti fatti:*

1. *il funtore inclusione $i: \mathbf{Sh}(X_{\text{ét}}) \rightarrow \mathbf{Presh}(X_{\text{ét}})$ è esatto a sinistra, e il funtore $a: \mathbf{Presh}(X_{\text{ét}}) \rightarrow \mathbf{Sh}(X_{\text{ét}})$ è esatto;*
2. *un morfismo di fasci $\phi: F \rightarrow F'$ è suriettivo in $\mathbf{Sh}(X_{\text{ét}})$ se e solo se per ogni $s \in F'(U)$ esistono un ricoprimento $(U_i \rightarrow U)_{i \in I}$ di U e degli elementi $s_i \in F(U_i)$ tali che $\phi(s_i) = \text{res}_{U_i, U}(s)$ per ogni i ;*
3. *una successione di fasci*

$$0 \rightarrow F' \rightarrow F \rightarrow F'' \rightarrow 0$$

è esatta in $\mathbf{Sh}(X_{\text{ét}})$ se e solo se la successione delle spighe

$$0 \rightarrow F'_{\bar{x}} \rightarrow F_{\bar{x}} \rightarrow F''_{\bar{x}} \rightarrow 0$$

è esatta per tutti i punti geometrici \bar{x} di X .

Dimostrazione. Il funtore inclusione è esatto a sinistra poiché, come nel caso classico, il nucleo di un morfismo di fasci è un fascio. Da questo segue, per le proprietà dei funtori aggiunti (Artin [3, I.1]), che a è esatto a destra. Sia $P \rightarrow P'$ un morfismo iniettivo di prefasci, allora con le notazioni della dimostrazione del teorema 4.4.5 anche il morfismo $P^* \rightarrow P'^*$ è iniettivo, poiché il funtore u_x^p è esatto. Inoltre

aP e aP' sono sottofasce rispettivamente di P^* e P'^* , per cui $aP \rightarrow aP'$ è iniettivo in $\mathbf{Presh}(X_{\acute{e}t})$. D'altra parte il funtore inclusione i è esatto a sinistra, quindi $aP \rightarrow aP'$ è iniettivo in $\mathbf{Sh}(X_{\acute{e}t})$.

Sia $\phi: F \rightarrow F'$ un morfismo di fasce, e sia P il conucleo di ϕ in $\mathbf{Presh}(X_{\acute{e}t})$. Allora la successione

$$F \xrightarrow{\phi} F' \rightarrow a(P) \rightarrow 0$$

è esatta (per la definizione di conucleo in $\mathbf{Sh}(X_{\acute{e}t})$). Di conseguenza ϕ è suriettiva in $\mathbf{Sh}(X_{\acute{e}t})$ se e soltanto se $a(P) = 0$ (il fascio nullo), se e soltanto se per ogni U e $s \in P(U)$ esiste un ricoprimento $(U_i \rightarrow U)_{i \in I}$ tale che $\text{res}_{U_i, U}(s) = 0$ per ogni i , ma questo è equivalente al secondo enunciato del teorema.

Infine consideriamo una successione di fasce su $X_{\acute{e}t}$,

$$0 \rightarrow F' \xrightarrow{\alpha} F \xrightarrow{\beta} F'' \rightarrow 0.$$

Osserviamo che per il primo punto del teorema, la successione

$$0 \rightarrow F' \rightarrow F \rightarrow F''$$

è esatta in $\mathbf{Sh}(X_{\acute{e}t})$ se e solo se la successione di gruppi

$$0 \rightarrow F'(U) \rightarrow F(U) \rightarrow F''(U)$$

è esatta per ogni aperto U di X , e questo implica che la successione delle spighe

$$0 \rightarrow F'_{\bar{x}} \rightarrow F_{\bar{x}} \rightarrow F''_{\bar{x}}$$

è esatta per ogni \bar{x} . Inoltre per la seconda parte del teorema, $F \rightarrow F''$ è suriettiva se e solo se $a(P) = 0$, che è equivalente a $(a(P))_{\bar{x}} = 0$ per ogni \bar{x} , che è a sua volta equivalente a $F_{\bar{x}} \rightarrow F''_{\bar{x}}$ suriettiva per ogni \bar{x} . Supponiamo ora che la successione

$$0 \rightarrow F'_{\bar{x}} \rightarrow F_{\bar{x}} \rightarrow F''_{\bar{x}}$$

sia esatta per ogni punto geometrico \bar{x} di X . Se $s' \in F'(U)$ è tale che $\alpha(s') = 0$, allora per ogni punto geometrico \bar{x} di U , $s'_{\bar{x}}$ andrà in 0 in $F'_{\bar{x}}$, e dunque $s'_{\bar{x}} = 0$, che implica $s' = 0$. Sia poi $s \in F(U)$ tale che $\beta(s) = 0$, allora $s_{\bar{x}} \in F'_{\bar{x}}$ per ogni \bar{x} . Questo implica che per ogni $u \in U$ esiste un morfismo étale $V_u \rightarrow U$ la cui immagine contiene u e tale che la restrizione di s a V_u sta nel sottogruppo $F'(V_u)$ di $F(V_u)$. Dal momento che $\{V_u\}_{u \in U}$ è un ricoprimento di U e F' è un fascio, si ha che $s \in F'(U)$. \square

DEFINIZIONE 4.4.7. Sia $\pi: X' \rightarrow X$ un morfismo étale di tipo finito. L'immagine diretta di un fascio F su $X'_{\text{ét}}$ è il fascio su $X_{\text{ét}}$

$$\pi_* F = a(\pi_p F) = F \circ \bar{\pi}.$$

L'immagine inversa di un fascio F su $X_{\text{ét}}$ è il fascio $\pi^* F$ su $X'_{\text{ét}}$ associato al prefascio $\pi^p F$.

Abbiamo così due funtori

$$\pi_*: \mathbf{Sh}(X'_{\text{ét}}) \rightarrow \mathbf{Sh}(X_{\text{ét}}) \quad \text{e} \quad \pi^*: \mathbf{Sh}(X_{\text{ét}}) \rightarrow \mathbf{Sh}(X'_{\text{ét}}).$$

Possiamo inoltre notare che π_* è esatto a sinistra, poiché è dato dalla composizione di due funtori esatti a sinistra.

TEOREMA 4.4.8. Siano $\pi: X' \rightarrow X$ un morfismo étale quasi-compatto e F un fascio su $X'_{\text{ét}}$. Dato un punto geometrico \bar{x} di X , si ha

$$(\pi_* F)_{\bar{x}} = \Gamma(X' \times_X \text{Spec } \mathcal{O}_{X, \bar{x}}^{\text{sh}}, \tilde{F}),$$

dove \tilde{F} indica l'immagine inversa di F su $X' \times_X \text{Spec } \mathcal{O}_{X, \bar{x}}^{\text{sh}}$.

Dimostrazione. Si veda Milne [19, II.3.2]. □

PROPOSIZIONE 4.4.9. Se $\pi: X' \rightarrow X$ è un'immersione chiusa, allora il funtore π_* è esatto.

Dimostrazione. Se \bar{x} è un punto geometrico di X , indichiamo con x il corrispondente punto in X . Dato un fascio F su $X'_{\text{ét}}$ per il teorema precedente si ha

$$(\pi_* F)_{\bar{x}} = \begin{cases} F_{\bar{x}} & \text{se } x = \pi(x'), x' \in X', \\ 0 & \text{se } x \notin \pi(X'), \end{cases}$$

dal momento che se $x \in X'$ allora $\text{Spec } \mathcal{O}_{X, \bar{x}} \times_X X' = \text{Spec } \mathcal{O}_{X', \bar{x}}$. Di conseguenza se

$$0 \rightarrow F' \rightarrow F \rightarrow F'' \rightarrow 0$$

è una successione esatta in $\mathbf{Sh}(X'_{\text{ét}})$ allora per ogni punto geometrico \bar{x}' di X' , la successione delle spighe

$$0 \rightarrow F'_{\bar{x}'} \rightarrow F_{\bar{x}'} \rightarrow F''_{\bar{x}'} \rightarrow 0$$

è esatta. Per l'osservazione fatta sopra, ricaviamo che

$$0 \rightarrow (\pi_* F')_{\bar{x}} \rightarrow (\pi_* F)_{\bar{x}} \rightarrow (\pi_* F'')_{\bar{x}} \rightarrow 0$$

è esatta per ogni punto geometrico \bar{x} di X , e questo conclude la dimostrazione. \square

4.5 ALCUNI ESEMPI DI FASCI

DEFINIZIONE 4.5.1. Uno schema G su X si dice uno *schema in gruppi abeliani* se per ogni X -schema Y l'insieme dei morfismi di X -schemi $\text{Hom}_X(Y, G)$ è un gruppo abeliano, e per ogni morfismo di X -schemi $Y' \rightarrow Y$ la mappa indotta per composizione

$$\text{Hom}_X(Y, G) \rightarrow \text{Hom}_X(Y', G)$$

è un omomorfismo di gruppi.

Vediamo che uno schema in gruppi abeliani G su X definisce un prefascio su $X_{\text{ét}}$, che indichiamo ancora con G , tale che se Y è un oggetto in $X_{\text{ét}}$,

$$G(Y) = \text{Hom}_X(Y, G).$$

PROPOSIZIONE 4.5.2. *Il prefascio definito da uno schema in gruppi abeliani su X è un fascio su $X_{\text{ét}}$.*

Dimostrazione. Si veda Milne [19, II.1.7]. \square

Vogliamo ora introdurre alcuni fasci definiti da schemi in gruppi abeliani e descrivere due successioni esatte che li coinvolgono.

Innanzitutto consideriamo il prefascio \mathbb{G}_m su $X_{\text{ét}}$ tale che $\mathbb{G}_m(U)$ è il gruppo moltiplicativo $\Gamma(U, \mathcal{O}_U)^*$ degli elementi invertibili di $\Gamma(U, \mathcal{O}_U)$ per tutti gli aperti U della topologia étale. Se poniamo

$$\mathbb{G}_{m,X} = X \times_{\text{Spec } \mathbb{Z}} \text{Spec } \mathbb{Z}[T, T^{-1}],$$

allora per ogni aperto U abbiamo

$$\begin{aligned} \text{Hom}_X(U, \mathbb{G}_{m,X}) &= \text{Hom}_{\text{Spec } \mathbb{Z}}(U, \text{Spec } \mathbb{Z}[T, T^{-1}]) \\ &= \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}[T, T^{-1}], \Gamma(U, \mathcal{O}_U)) \\ &= \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}[T], \Gamma(U, \mathcal{O}_U)^*) \\ &= \Gamma(U, \mathcal{O}_U)^* = \mathbb{G}_m(U), \end{aligned}$$

e di conseguenza \mathbb{G}_m è un fascio.

Definiamo poi il sottofascio μ_n di \mathbb{G}_m tale che $\mu_n(U)$ è il gruppo delle radici n -esime dell'unità contenute in $\Gamma(U, \mathcal{O}_U)$. Questo è effettivamente un fascio, poiché è definito dallo schema in gruppi abeliani $\text{Spec } \mathbb{Z}[T]/(T^n - 1)$ (la verifica è analoga alla precedente).

PROPOSIZIONE 4.5.3 (Successione di Kummer). *Siano $n \in \mathbb{N}$ e X uno schema tale che per ogni $x \in X$ la caratteristica di $k(x)$ non divide n . Allora la successione*

$$0 \rightarrow \mu_n \rightarrow \mathbb{G}_m \xrightarrow{n} \mathbb{G}_m \rightarrow 0,$$

dove n indica la mappa ($u \mapsto u^n$): $\mathbb{G}_m(U) \rightarrow \mathbb{G}_m(U)$, è esatta in $\mathbf{Sh}(X_{\text{ét}})$.

Dimostrazione. Osserviamo per prima cosa che la successione

$$0 \rightarrow \mu_n \rightarrow \mathbb{G}_m \xrightarrow{n} \mathbb{G}_m$$

è esatta in $\mathbf{Presh}(X_{\text{ét}})$, e dunque in $\mathbf{Sh}(X_{\text{ét}})$. Sia \bar{x} un punto geometrico di X , allora $(\mathbb{G}_m)_{\bar{x}} = A^*$, con $A = \mathcal{O}_{X, \bar{x}}^{\text{sh}}$. Di conseguenza la successione delle spighe è

$$0 \rightarrow \mu_n(A) \rightarrow A^* \xrightarrow{n} A^* \rightarrow 0,$$

dove abbiamo posto $\mu_n(A) = \mu_n(\text{Spec } A)$. Possiamo facilmente vedere che $A[T]/(T^n - a)$ è étale su A per ogni $a \in A^*$. Dal momento che A è un anello strettamente henseliano, esiste una sezione s della mappa $f: A \rightarrow A[T]/(T^n - a)$ per ogni $a \in A^*$, tale che $s \circ f = \text{id}_A$. Questo implica che la mappa $A^* \xrightarrow{n} A^*$ è suriettiva. \square

Consideriamo adesso uno schema X regolare, integro e noetheriano, e sia $X^{(1)}$ l'insieme dei punti di X di codimensione 1. Notiamo che per ogni $x \in X^{(1)}$, l'anello $\mathcal{O}_{X, \bar{x}}^{\text{sh}}$ ha dimensione 1 ed è perciò un anello di valutazione discreta.

DEFINIZIONE 4.5.4. Definiamo il *fascio dei divisori di Weil* su $X_{\text{ét}}$ come

$$D_X = \bigoplus_{x \in X^{(1)}} i_{x*} \mathbb{Z},$$

dove $i_x: \text{Spec } k(x) \rightarrow X$ e \mathbb{Z} denota il fascio costante definito da \mathbb{Z} su $x = \text{Spec } k(x)$.

PROPOSIZIONE 4.5.5. *Dato uno schema integro, regolare e quasi-compatto X , e denotata con $g: \text{Spec } K \rightarrow X$ l'inclusione del punto generico, si ha una successione esatta di fasci*

$$0 \rightarrow \mathbb{G}_{m, X} \rightarrow g_* \mathbb{G}_{m, K} \rightarrow D_X \rightarrow 0,$$

dove $\mathbb{G}_{m, X}$ e $\mathbb{G}_{m, K}$ sono i fasci definiti da \mathbb{G}_m rispettivamente su X e $\text{Spec } K$, mentre D_X è il fascio dei divisori di Weil su $X_{\text{ét}}$.

Dimostrazione. Per ogni schema $U \rightarrow X$ étale di tipo finito, si ha che

$$\Gamma(U, g_* \mathbb{G}_{m, K}) = \Gamma(U \times_X \text{Spec } K, \mathbb{G}_m).$$

Di conseguenza otteniamo l'omomorfismo

$$\Gamma(U, \mathbf{G}_m) \hookrightarrow \Gamma(U \times_X \text{Spec } K).$$

Per verificare che quest'ultimo è iniettivo, possiamo supporre che $X = \text{Spec } A$ e $U = \text{Spec } B$, in questo caso

$$\Gamma(\text{Spec } B, \mathbf{G}_m) = B^* \subset (S^{-1}B)^* = \Gamma(\text{Spec } B \otimes_A K, \mathbf{G}_m),$$

dove $S = A \setminus \{0\}$. Questo ci dà l'inclusione di fasci

$$\phi: \mathbf{G}_{m,X} \rightarrow g_* \mathbf{G}_{m,K}.$$

Definiamo la mappa

$$\psi: g_* \mathbf{G}_{m,K} \rightarrow D_X,$$

richiedendo che ψ associ a un elemento $f \in \Gamma(U \times_X \text{Spec } K, \mathbf{G}_m)$ la famiglia $(\text{ord}_x(f))_{x \in U^{(1)}}$, dove $U^{(1)}$ è l'insieme dei punti di U di codimensione 1 e ord_x è la valutazione discreta definita da $\mathcal{O}_{U,x}$ su $\Gamma(U \times_X \text{Spec } K, \mathcal{O}_{U \times_X \text{Spec } K})$.

Consideriamo la successione delle spighe in un punto geometrico \bar{x} ,

$$0 \rightarrow A^* \xrightarrow{\phi} L^* \xrightarrow{\psi} \bigoplus \mathbb{Z} \rightarrow 0,$$

dove $A = \mathcal{O}_{X,\bar{x}}^{\text{sh}}$, L è il campo dei quozienti di A e la somma è su tutti gli ideali primi di A di altezza 1. Osserviamo che poiché A è regolare, allora è un dominio a fattorizzazione unica, per cui gli ideali primi di altezza 1 sono principali (Eisenbud [12, 19.19]). Questo implica che la mappa ψ è suriettiva. Infine se $u \in L^*$ è tale che $\psi(u) = 0$, allora $u = a/b$, con $a, b \in A \setminus \{0\}$, e a e b non sono contenuti in alcun ideale primo di altezza 1 di A , per cui $a, b \in A^*$ e di conseguenza $u \in A^*$. \square

4.6 LA COOMOLOGIA ÉTALE

Ricordiamo brevemente la definizione di funtore derivato. Sia \mathcal{C} una categoria abeliana con abbastanza iniettivi, cioè per ogni oggetto A di \mathcal{C} esistono un oggetto iniettivo $I \in \mathcal{C}$ e un monomorfismo $A \rightarrow I$. Dato un funtore esatto a sinistra $f: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$, dove \mathcal{D} è una categoria abeliana, è possibile definire una famiglia di funtori $R^q f: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ per $q \geq 0$, detti i *funtori derivati destri* di f . Per prima cosa si considera una risoluzione iniettiva I^* di $A \in \mathcal{C}$,

$$0 \rightarrow A \rightarrow I^0 \rightarrow I^1 \rightarrow I^2 \rightarrow \dots,$$

a cui si applica il funtore f così da ottenere il complesso

$$0 \rightarrow f(I^0) \xrightarrow{\alpha_0} f(I^1) \xrightarrow{\alpha_1} f(I^2) \xrightarrow{\alpha_2} \dots$$

Gli oggetti $R^q f(A)$ sono allora definiti come i gruppi di coomologia di questo complesso. Si può verificare che la definizione è ben posta, ossia non dipende dalla risoluzione iniettiva scelta (Bucur e Deleanu [7, VII.3]).

PROPOSIZIONE 4.6.1. *Valgono le seguenti proprietà:*

1. $R^0 f = f$;
2. se I è un oggetto iniettivo, $R^q f(I) = 0$ per $q > 0$;
3. se f è un funtore esatto, $R^q f = 0$ per ogni $q > 0$;
4. data una successione esatta in \mathcal{C} ,

$$0 \rightarrow A' \rightarrow A \rightarrow A'' \rightarrow 0,$$

esistono dei morfismi $\delta^q: R^q f(A'') \rightarrow R^{q+1} f(A')$ per ogni $q \geq 0$, tali che la successione

$$\dots \rightarrow R^q f(A') \rightarrow R^q f(A) \rightarrow R^q f(A'') \xrightarrow{\delta^q} R^{q+1} f(A') \rightarrow \dots$$

è esatta;

5. il modo in cui a una successione esatta corta in \mathcal{C} si associa una successione esatta lunga è functoriale.

Dimostrazione. I primi due punti seguono immediatamente dalla definizione.

Supponiamo che f sia un funtore esatto. Allora dati $A \in \mathcal{C}$ e una risoluzione iniettiva I^* di A , la successione

$$0 \rightarrow f(A) \rightarrow f(I^0) \rightarrow f(I^1) \rightarrow f(I^2) \rightarrow \dots$$

è esatta, da cui si ricava che i gruppi $R^q f(A)$ sono nulli per $q > 0$. Per gli ultimi due punti si veda Bucur e Deleanu [7, VII.4]. \square

Dato uno schema X , consideriamo il funtore

$$\Gamma(X, -): \mathbf{Sh}(X_{\text{ét}}) \rightarrow \mathbf{Ab},$$

che associa a un fascio F il gruppo $\Gamma(X, F) = F(X)$. Possiamo notare che questo funtore è esatto a sinistra, poiché abbiamo visto che il funtore inclusione $i: \mathbf{Sh}(X_{\text{ét}}) \rightarrow \mathbf{Presh}(X_{\text{ét}})$ è esatto a sinistra.

PROPOSIZIONE 4.6.2. *La categoria $\mathbf{Sh}(X_{\acute{e}t})$ ha abbastanza iniettivi, cioè per ogni $F \in \mathbf{Sh}(X_{\acute{e}t})$ esistono un oggetto iniettivo $I \in \mathbf{Sh}(X_{\acute{e}t})$ e un monomorfismo $F \rightarrow I$.*

Dimostrazione. Si veda Milne [19, III.1.1]. □

DEFINIZIONE 4.6.3. I gruppi di coomologia di X a coefficienti in un fascio $F \in \mathbf{Sh}(X_{\acute{e}t})$ sono i funtori derivati destri del funtore $\Gamma(X, -)$.

PROPOSIZIONE 4.6.4. *Sia X uno schema noetheriano. Data una famiglia $\{F_j\}_{j \in J}$ di fasci su $X_{\acute{e}t}$, si ha*

$$H^r \left(X_{\acute{e}t}, \bigoplus_{j \in J} F_j \right) \cong \bigoplus_{j \in J} H^r(X_{\acute{e}t}, F_j)$$

per ogni $r \geq 0$.

Dimostrazione. Si veda Milne [19, III.3.6]. □

PROPOSIZIONE 4.6.5. *Consideriamo un sistema inverso $(X_j)_{j \in J}$ di X -schemi noetheriani, tale che i morfismi di transizione $X_j \rightarrow X_i$ sono affini. Sia $\bar{X} = \varprojlim X_j$, e per ogni fascio F su $X_{\acute{e}t}$ indichiamo con F_j e \bar{F} l'immagine inversa di F rispettivamente su X_j e su \bar{X} . Allora*

$$\varinjlim H^r((X_j)_{\acute{e}t}, F_j) \cong H^r(\bar{X}_{\acute{e}t}, \bar{F}).$$

Dimostrazione. Si veda Milne [19, III.1.16]. □

PROPOSIZIONE 4.6.6. *Siano $\pi: Y \rightarrow X$ un morfismo étale di tipo finito e F un fascio su $Y_{\acute{e}t}$. Allora $R^q \pi_* F$ è il fascio associato al prefascio*

$$U \longmapsto H^q(U \times_X Y, F|_{U \times_X Y}).$$

Dimostrazione. Ricordiamo che $\pi_* = a\pi_p i$, dove

$$i: \mathbf{Sh}(Y_{\acute{e}t}) \rightarrow \mathbf{Presh}(X_{\acute{e}t})$$

è l'inclusione. Sia I^* una risoluzione iniettiva di F in $\mathbf{Sh}(Y_{\acute{e}t})$, allora $R^q \pi_* F$ è il q -esimo gruppo di coomologia del complesso di fasci $a\pi_p(iI^*)$. D'altra parte i funtori a e π_p sono esatti, per cui

$$R^q \pi_* F = a\pi_p(H^q(iI^*)).$$

Vediamo infine che per ogni U ,

$$(\pi_p(H^q(iI^*))) (U) = (H^q(iI^*)) (U \times_X Y) = H^q(U \times_X Y, F),$$

dove l'ultima uguaglianza deriva dal fatto che se per ogni q poniamo $Z_q = \ker(iI^q \rightarrow iI^{q+1})$ e $B_q = \text{im}(iI^{q-1} \rightarrow iI^q)$, allora

$$\frac{Z_q(U \times_X Y)}{B_{q+1}(U \times_X Y)} = iI^q(U \times_X Y) = I^q(U \times_X Y) = \frac{Z_q(U \times_X Y)}{aB_{q+1}(U \times_X Y)}$$

e di conseguenza si ha

$$(H^q(iI^*)) (U \times_X Y) = Z_q(U \times_X Y) / B_q(U \times_X Y) = H^q(U \times_X Y, F). \quad \square$$

PROPOSIZIONE 4.6.7. *Siano $\pi: Y \rightarrow X$ un morfismo étale quasi-compatto e $F \in \mathbf{Sh}(Y_{\text{ét}})$. Dato un punto geometrico \bar{x} di X , si ha*

$$(R^q \pi_* F)_{\bar{x}} \cong H^q((Y \times_X \text{Spec } \mathcal{O}_{X, \bar{x}}^{\text{sh}}, \tilde{F}),$$

dove \tilde{F} indica l'immagine inversa del fascio F su $Y \times_X \text{Spec } \mathcal{O}_{X, \bar{x}}^{\text{sh}}$.

Dimostrazione. Per la proposizione precedente si ha che

$$(R^q \pi_* F)_{\bar{x}} = \varinjlim H^q(U \times_X Y, F|_{U \times_X Y}),$$

e notiamo che possiamo restringerci a fare il limite solo sugli schemi étale $U \rightarrow X$ con U affine. Abbiamo inoltre che $\text{Spec } \mathcal{O}_{X, \bar{x}}^{\text{sh}} = \varprojlim U$, per cui otteniamo

$$Y \times_X \text{Spec } \mathcal{O}_{X, \bar{x}}^{\text{sh}} = Y \times_X (\varprojlim U) = \varprojlim (Y \times_X U).$$

Allora la tesi segue dalla proposizione 4.6.5. □

TEOREMA 4.6.8 (Successione spettrale di Leray). *Per ogni morfismo étale di tipo finito $\pi: Y \rightarrow X$, esiste una successione spettrale*

$$H^p(X_{\text{ét}}, R^q \pi_* F) \Rightarrow H^{p+q}(Y_{\text{ét}}, F),$$

dove F è un fascio su $Y_{\text{ét}}$.

Dimostrazione. Si veda Milne [19, III.1.18]. □

Siano Y uno schema e G un gruppo finito, denotiamo con G_Y lo schema $\sqcup_{g \in G} Y_g$, dove $Y_g = Y$ per ogni $g \in G$. Possiamo definire un'azione di G su G_Y richiedendo che $g|_{Y_h}: Y_h \rightarrow Y_{hg}$ sia l'identità.

DEFINIZIONE 4.6.9. Dato un morfismo étale finito $f: Y \rightarrow X$, con X e Y connessi, e dato un gruppo finito G che agisce su Y , diciamo che $f: Y \rightarrow X$ è un *rivestimento di Galois* con gruppo di Galois G se f è suriettivo e la mappa

$$\psi: G_Y \rightarrow Y \times Y, \quad \psi|_{Y_g} = (y \mapsto (y, yg))$$

è un isomorfismo.

TEOREMA 4.6.10 (Successione spettrale di Hochschild-Serre). *Sia $\pi: Y \rightarrow X$ un rivestimento di Galois finito con gruppo di Galois G , e sia F un fascio su $X_{\acute{e}t}$. Allora esiste una successione spettrale*

$$H^p(G, H^q(Y_{\acute{e}t}, F)) \Rightarrow H^{p+q}(X_{\acute{e}t}, F).$$

Dimostrazione. Si veda Milne [19, III.2.20]. □

TEOREMA 4.6.11 (Hilbert 90). *Per ogni schema X si ha*

$$H^1(X_{\acute{e}t}, \mathbf{G}_m) \cong H^1(X_{Zar}, \mathcal{O}_X^*) \cong \text{Pic}(X).$$

Dimostrazione. Si veda Milne [19, III.4.9]. □

4.7 CONFRONTO CON LA COOMOLOGIA DI GALOIS

Sia K un campo e consideriamo il sito étale su $X = \text{Spec } K$. Fissiamo una chiusura separabile K_s di K e poniamo $G = \text{Gal}(K_s/K)$. Vogliamo mettere in relazione i gruppi di coomologia étale di $\text{Spec } K$ con i gruppi di coomologia di Galois di G .

Possiamo notare che ogni schema U étale e di tipo finito su $\text{Spec } K$ è unione finita di spettri di estensioni finite e separabili di K .

Dato un prefascio P su $X_{\acute{e}t}$, definiamo il gruppo abeliano

$$M_P = \varinjlim P(\text{Spec } K'),$$

dove il limite è fatto su tutte le estensioni intermedie $K \subset K' \subset K_s$ tali che K'/K è finita. È possibile inoltre definire un'azione di G su M_P , osservando che se K'/K è un'estensione di Galois, G agisce su $P(\text{Spec } K')$ tramite la sua azione su K' . Segue immediatamente che M_P con questa azione è un G -modulo discreto, poiché

$$M_P = \bigcup_H M_P^H,$$

dove l'unione è sui sottogruppi aperti H di G e M_P^H è il sottomodulo di M_P costituito dagli elementi fissati da H .

D'altra parte se M è un G -modulo discreto, definiamo il prefascio F_M su $X_{\acute{e}t}$ dato da

$$F_M(U) = \text{Hom}_G(\text{Hom}_X(\text{Spec } K_s, U), M).$$

Osserviamo che se $K \subset K' \subset K_s$ è un'estensione intermedia e poniamo $H = \text{Gal}(K_s/K')$, allora

$$\begin{aligned} F_M(\text{Spec } K') &\cong \text{Hom}_G(\text{Hom}_K(K', K_s), M) \\ &\cong \text{Hom}_G(G/H, M) \cong M^H. \end{aligned}$$

Inoltre se $U = \bigsqcup \text{Spec } K_i$ è uno schema étale di tipo finito su X , allora

$$\begin{aligned} F_M(U) &\cong \text{Hom}_G(\text{Hom}_K(\otimes_i K_i, K_s), M) \\ &\cong \text{Hom}_G(\prod \text{Hom}_K(K_i, K_s), M) \\ &\cong \prod \text{Hom}_G(\text{Hom}_K(K_i, K_s), M) \cong \prod F_M(\text{Spec } K_i). \end{aligned}$$

LEMMA 4.7.1. *Il prefascio F_M è un fascio.*

Dimostrazione. Sia $(U_i \rightarrow U)_{i \in I}$ un ricoprimento. Possiamo supporre $U = \text{Spec } L$ e $U_i = \text{Spec } L_i$ con $K \subset L \subset L_i$ estensioni di campi finite e separabili. Inoltre per le proprietà osservate sopra, ci si può ridurre al caso in cui il ricoprimento è composto da un solo aperto $U' = \text{Spec } L'$. Prendiamo un'estensione finita e di Galois $L \subset L''$ tale che $L' \subset L''$ e poniamo $H = \text{Gal}(L''/L)$. Se k è un campo, scriviamo per brevità $F_M(k)$ per $F_M(\text{Spec } k)$. Allora per definizione si ha $F_M(L) = F_M(L'')^H$, dunque la successione

$$F_M(L) \longrightarrow F_M(L'') \rightrightarrows F_M(L'' \otimes_L L'')$$

è esatta. D'altra parte si ha il diagramma

$$\begin{array}{ccccc} F_M(L) & \longrightarrow & F_M(L') & \rightrightarrows & F_M(L' \otimes_L L') \\ \parallel & & \downarrow & & \downarrow \\ F_M(L) & \longrightarrow & F_M(L'') & \rightrightarrows & F_M(L'' \otimes_L L'') \end{array}$$

dove le mappe $F_M(L) \rightarrow F_M(L')$ e $F_M(L') \rightarrow F_M(L'')$ sono iniettive. A questo punto si può concludere che la prima riga del diagramma è esatta attraverso una caccia lungo il diagramma. \square

TEOREMA 4.7.2. *Dato un campo K e posto $X = \text{Spec } K$, esiste un'equivalenza di categorie tra $\mathbf{Sh}(X_{\text{ét}})$ e la categoria $G\text{-mod}$ dei G -moduli discreti, dove $G = \text{Gal}(K_s/K)$ con K_s chiusura separabile di K .*

Dimostrazione. L'equivalenza cercata è data dalle corrispondenze sopra descritte tra fasci e moduli discreti. Se $M \rightarrow M'$ è un omomorfismo di G -moduli, questo induce ovviamente un morfismo di fasci

$F_M \rightarrow F_{M'}$. Viceversa sia $\psi: F \rightarrow F'$ è un morfismo di fasci. Se H è un sottogruppo aperto di G e $K' = K_s^H$, allora l'omomorfismo

$$\psi(\text{Spec } K'): F(\text{Spec } K') \rightarrow F'(\text{Spec } K')$$

commuta con l'azione di G a causa della funtorialità di ψ . Dunque il limite $\varinjlim \psi(\text{Spec } K')$ dà un omomorfismo di G -moduli da M_F a $M_{F'}$. \square

TEOREMA 4.7.3. *Sia K un campo, $G = \text{Gal}(K_s/K)$, con K_s una chiusura separabile di K , e $X = \text{Spec } K$. Se $F \in \mathbf{Sh}(X_{\text{ét}})$ corrisponde al G -modulo discreto M , allora*

$$H^r(X_{\text{ét}}, F) \cong H^r(G, M) \quad \text{per ogni } r \geq 0.$$

Dimostrazione. Dal momento che $\Gamma(X, F) = M^G = H^0(G, M)$, la tesi segue per l'unicità dei funtori derivati. \square

COROLLARIO 4.7.4. *Dato un campo K , si ha*

$$\text{Br}(K) \cong H^2(\text{Gal}(K_s/K), K_s^*) \cong H^2(\text{Spec } K, \mathbf{G}_m),$$

con K_s chiusura separabile di K .

5

ESEMPI DI GRUPPI DI BRAUER

In questo capitolo vogliamo presentare alcune applicazioni delle nozioni di coomologia étale introdotte in precedenza per calcolare esplicitamente il gruppo di Brauer di alcuni campi. La strategia comune dei tre esempi che diamo è quella di considerare per prima cosa uno schema regolare integro e noetheriano X , il cui punto generico è lo spettro del campo K in questione. Dopo di che usando la successione esatta di fasci della proposizione 4.5.5,

$$(5.1) \quad 0 \rightarrow \mathbf{G}_{m,X} \rightarrow g_*\mathbf{G}_{m,K} \rightarrow \bigoplus_{x \in X^{(1)}} i_{x*}\mathbf{Z} \rightarrow 0,$$

si cerca di studiare la corrispondente successione in coomologia e di metterla in relazione con $\text{Br}(K) = H^2(\text{Spec } K, \mathbf{G}_m)$.

5.1 CAMPI LOCALI

DEFINIZIONE 5.1.1. Un *campo locale* è un campo K completo rispetto a una valutazione discreta indotta da un anello A , il cui campo dei residui è finito.

In altre parole K è il campo dei quozienti di un anello di valutazione discreta completo A , inoltre se denotiamo con $\mathfrak{m} \subset A$ l'ideale massimale di A , allora il campo dei residui $k = A/\mathfrak{m}$ è finito. In particolare l'anello A è henseliano, in quanto è un anello locale completo (proposizione 4.2.3).

Dato un campo locale K , e fissate le notazioni come sopra, consideriamo lo schema affine $X = \text{Spec } A$. Possiamo osservare che X è uno schema di dimensione 1, poiché la dimensione di Krull dell'anello A è 1. Inoltre come spazio topologico X consiste solo di due punti: un punto chiuso $\text{Spec } k$ che corrisponde all'ideale massimale, e un punto generico $\text{Spec } K$ che corrisponde all'ideale nullo.

In questo caso la successione (5.1) è semplicemente

$$0 \rightarrow \mathbf{G}_{m,X} \rightarrow g_*\mathbf{G}_{m,K} \rightarrow i_*\mathbf{Z} \rightarrow 0,$$

dove indichiamo con $g: \text{Spec } K \rightarrow X$ l'inclusione del punto generico, e con $i: \text{Spec } k \rightarrow X$ l'inclusione del punto chiuso. Di conseguenza si avrà una successione esatta lunga in coomologia della forma

$$(5.2) \quad \cdots \rightarrow H^r(X, \mathbf{G}_m) \rightarrow H^r(X, g_* \mathbf{G}_m) \rightarrow H^r(X, i_* \mathbf{Z}) \rightarrow H^{r+1}(X, \mathbf{G}_m) \rightarrow \cdots$$

Indichiamo poi con \bar{k} una chiusura separabile (e perciò anche algebrica) di k , e sia A^{sh} l'henselianizzazione stretta di A , allora A^{sh} è ancora un dominio di valutazione discreta, ma con campo dei residui algebricamente chiuso, poiché questo coincide con \bar{k} .

Se poniamo $S = A \setminus \{0\}$, allora si ha

$$K \otimes_A A^{\text{sh}} = S^{-1} A \otimes_A A^{\text{sh}} = S^{-1}(A \otimes_A A^{\text{sh}}) = S^{-1} A^{\text{sh}};$$

d'altra parte osserviamo che $\text{Spec}(K \otimes_A A^{\text{sh}})$ è anche la controimmagine del punto generico $\text{Spec } K$ di X per la mappa $\text{Spec } A^{\text{sh}} \rightarrow \text{Spec } A$. Ma per definizione la mappa $f: A \rightarrow A^{\text{sh}}$ è un omomorfismo locale, per cui se \mathfrak{n} è l'ideale massimale di A^{sh} , si ha $f(\mathfrak{m}) \subset \mathfrak{n}$, e quindi $f^{-1}(\mathfrak{n})$ è un ideale primo di A che contiene \mathfrak{m} , cioè coincide con \mathfrak{m} . In particolare questo dimostra che la mappa $\text{Spec } A^{\text{sh}} \rightarrow \text{Spec } A$ manda punti chiusi in punti chiusi; ne segue che la controimmagine del punto generico di X è costituita da un solo punto (che sarà il punto generico di $\text{Spec } A^{\text{sh}}$), dunque $K \otimes_A A^{\text{sh}} = S^{-1} A^{\text{sh}}$ è un campo. Osservando poi che $A^{\text{sh}} \subset S^{-1} A^{\text{sh}} \subset K_{\text{nr}}$, dove K_{nr} indica il campo dei quozienti di A^{sh} , si ha subito che

$$K \otimes_A A^{\text{sh}} = S^{-1} A^{\text{sh}} = K_{\text{nr}}.$$

PROPOSIZIONE 5.1.2. *L'estensione di campi $K \subset K_{\text{nr}}$ è di Galois, e*

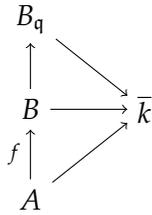
$$\text{Gal}(K_{\text{nr}}/K) = \widehat{\mathbb{Z}}.$$

Dimostrazione. Osserviamo che $A^{\text{sh}} = \varinjlim B$ dove il limite è sui triangoli commutativi

$$\begin{array}{ccc} B & \longrightarrow & \bar{k} \\ f \uparrow & \nearrow & \\ A & & \end{array}$$

tali che $\text{Spec } B \rightarrow \text{Spec } A$ è étale. Dal momento che A è henseliano, gli anelli B sono A -algebre finite. Inoltre possiamo restringere il limite

solo agli anelli locali, poiché se $\mathfrak{q} \subset B$ è un ideale primo tale che $f(\mathfrak{q}) \subset \mathfrak{m}$, allora si ha



dove $B_{\mathfrak{q}}$ indica la localizzazione di B in \mathfrak{q} .

Consideriamo perciò una A -algebra finita e locale B , e sia $\mathfrak{n} \subset B$ l'ideale massimale, allora

$$k = A/\mathfrak{m} \subset B/\mathfrak{n} = k'$$

è un'estensione finita e di Galois di grado n . Di conseguenza k' è un'estensione semplice, ossia della forma $k' = k[x]/(q)$, con $q \in k[x]$ polinomio irriducibile e monico di grado n . Prendiamo $p \in A[x]$ un polinomio monico di grado n tale che $\pi(p) = q \in k[x]$, e notiamo che p è irriducibile (perché altrimenti q sarebbe riducibile). Poniamo

$$B' = A[x]/(p),$$

allora B' è un anello di valutazione discreta completo e si può mostrare come prima che

$$K \otimes_A B' = K[x]/(p)$$

è il campo dei quozienti di B' , che indichiamo con K' , per cui $K \subset K'$ è un'estensione finita e di Galois con gruppo di Galois $\text{Gal}(k'/k)$.

In definitiva quindi si ha che

$$K_{\text{nr}} = K \otimes_A A^{\text{sh}} = K \otimes_A \varinjlim B = \varinjlim (K \otimes_A B) = \varinjlim K',$$

e dunque $K \subset K_{\text{nr}}$ è un'estensione di Galois e

$$\text{Gal}(K_{\text{nr}}/K) = \varinjlim \text{Gal}(k'/k) = \text{Gal}(\bar{k}/k) = \widehat{\mathbb{Z}}. \quad \square$$

PROPOSIZIONE 5.1.3. *Il campo K_{nr} è quasi-algebricamente chiuso.*

Dimostrazione. Indichiamo con \widehat{K}_{nr} il completamento di K_{nr} . Dal momento che K è completo e K_{nr} è un'estensione di Galois di K , l'estensione $K \subset \widehat{K}_{\text{nr}}$ è separabile (si veda Serre [22, II.3.3]), per cui anche l'estensione $K_{\text{nr}} \subset \widehat{K}_{\text{nr}}$ lo è. Possiamo quindi applicare il teorema 3.2.4 e ottenere che K_{nr} è quasi-algebricamente chiuso. \square

COROLLARIO 5.1.4. Si ha $H^r(\text{Spec } K_{\text{nr}}, \mathbf{G}_m) = 0$ per ogni $r > 0$.

Dimostrazione. Dal momento che K_{nr} è quasi-algebricamente chiuso, per le proposizioni 3.1.3 e 3.1.8 si ha che la sua dimensione coomologica stretta è minore o uguale a 2. Inoltre il gruppo di Brauer di K_{nr} è nullo. Da questi due fatti segue che $H^r(\text{Spec } K_{\text{nr}}, \mathbf{G}_m) = 0$ per $r \geq 2$. Infine

$$H^1(\text{Spec } K_{\text{nr}}, \mathbf{G}_m) = \text{Pic}(\text{Spec } K_{\text{nr}}) = 0. \quad \square$$

PROPOSIZIONE 5.1.5. Dato un campo locale K con anello di valutazione discreta A , e indicata con $g: \text{Spec } K \rightarrow \text{Spec } A$ l'inclusione, si ha

$$H^r(\text{Spec } K, \mathbf{G}_m) \cong H^r(\text{Spec } A, g_* \mathbf{G}_m), \quad \text{per ogni } r \geq 0.$$

Dimostrazione. Consideriamo la successione spettrale di Leray per la mappa g ,

$$H^p(\text{Spec } A, R^q g_* \mathbf{G}_m) \Rightarrow H^{p+q}(\text{Spec } K, \mathbf{G}_m).$$

Osserviamo che i fasci $R^q g_* \mathbf{G}_m$ sono nulli per $q > 0$, poiché se \bar{x} è un punto geometrico di $\text{Spec } A$, allora per la proposizione 4.6.7,

$$\begin{aligned} (R^q g_* \mathbf{G}_m)_{\bar{x}} &\cong H^q(\text{Spec } A^{\text{sh}} \times_{\text{Spec } A} \text{Spec } K, \mathbf{G}_m) \\ &= H^q(\text{Spec } (A^{\text{sh}} \otimes_A K), \mathbf{G}_m) \\ &= H^q(\text{Spec } K_{\text{nr}}, \mathbf{G}_m). \end{aligned}$$

Di conseguenza la successione di Leray degenera e si ha

$$H^p(\text{Spec } A, g_* \mathbf{G}_m) \cong H^p(\text{Spec } K, \mathbf{G}_m),$$

per ogni $p \geq 0$. □

PROPOSIZIONE 5.1.6. Sia A un anello henseliano con campo dei residui k , allora

$$H^r(\text{Spec } A, \mathbf{G}_m) \cong H^r(\text{Spec } k, \mathbf{G}_m), \quad \text{per ogni } r > 0.$$

Dimostrazione. Si veda Milne [19, III.3.11]. □

COROLLARIO 5.1.7. Sia A un anello di valutazione discreta completo con campo dei residui finito k , allora

$$H^r(\text{Spec } A, \mathbf{G}_m) = 0, \quad \text{per } r > 0.$$

Dimostrazione. Per la proposizione appena citata basta mostrare che i gruppi $H^r(\text{Spec } k, \mathbf{G}_m)$ sono nulli per ogni $r > 0$. D'altra parte per il

teorema 3.2.3, i campi finiti sono quasi-algebricamente chiusi, allora in maniera del tutto analoga a quanto fatto nel caso di K_{nr} si mostra che $H^r(\text{Spec } k, \mathbb{G}_m) = 0$ per $r > 0$. \square

COROLLARIO 5.1.8. *Dato un campo locale K con anello di valutazione discreta A e campo dei residui k , si ha*

$$H^r(\text{Spec } K, \mathbb{G}_m) \cong H^r(\text{Spec } A, i_*\mathbb{Z}), \quad \text{per ogni } r > 0,$$

dove $i: \text{Spec } k \rightarrow \text{Spec } A$ è l'inclusione.

Dimostrazione. L'enunciato segue immediatamente dalla successione esatta (5.2) e dal corollario precedente. \square

PROPOSIZIONE 5.1.9. *Dato un anello di valutazione discreta completo A con campo dei residui k , si ha*

$$H^r(\text{Spec } A, i_*\mathbb{Z}) \cong H^r(\text{Spec } k, \mathbb{Z}), \quad \text{per ogni } r \geq 0,$$

dove $i: \text{Spec } k \rightarrow \text{Spec } A$ è l'inclusione.

Dimostrazione. Scriviamo la successione di Leray per la mappa i ,

$$H^p(\text{Spec } A, R^q i_*\mathbb{Z}) \Rightarrow H^{p+q}(\text{Spec } k, \mathbb{Z}),$$

e osserviamo che i_* è un funtore esatto dal momento che i è un'immersione chiusa (proposizione 4.4.9). Quindi $R^q i_* = 0$ per ogni $q > 0$, e in particolare

$$R^q i_*\mathbb{Z} = 0, \quad \text{per ogni } q > 0.$$

Allora la successione spettrale degenera e otteniamo

$$H^p(\text{Spec } A, i_*\mathbb{Z}) \cong H^p(\text{Spec } k, \mathbb{Z}),$$

per ogni $p \geq 0$. \square

PROPOSIZIONE 5.1.10. *Per ogni campo finito k , si ha*

$$H^r(\text{Spec } k, \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & r = 0, \\ 0 & r = 1, \\ \mathbb{Q}/\mathbb{Z} & r = 2, \\ 0 & r > 2. \end{cases}$$

Dimostrazione. Come già osservato, ogni campo finito è quasi-algebricamente chiuso, di conseguenza per le proposizioni 3.1.3 e

3.1.8 si ha che $H^r(\text{Spec } k, \mathbb{Z}) = 0$ per ogni $r > 2$. Per calcolare $H^2(\text{Spec } k, \mathbb{Z})$ usiamo la successione esatta

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \rightarrow 0,$$

tenendo presente che \mathbb{Q} è un gruppo divisibile privo di torsione, per cui dalla proposizione 1.5 si trova che

$$H^r(\text{Spec } k, \mathbb{Q}) = H^r(\widehat{\mathbb{Z}}, \mathbb{Q}) = 0$$

per ogni $r > 0$. Allora ricaviamo

$$H^r(\text{Spec } k, \mathbb{Z}) \cong H^{r-1}(\text{Spec } k, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}),$$

per ogni $r > 1$. In particolare

$$\begin{aligned} H^2(\text{Spec } k, \mathbb{Z}) &= H^1(\text{Spec } k, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = \text{Hom}(\widehat{\mathbb{Z}}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \\ &= \varinjlim_n \text{Hom}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = \mathbb{Q}/\mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Infine per quanto riguarda il primo gruppo di coomologia vediamo che

$$H^1(\text{Spec } k, \mathbb{Z}) = H^1(\widehat{\mathbb{Z}}, \mathbb{Z}) = \varinjlim_n H^1(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) = \varinjlim_n \text{Hom}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \mathbb{Z}),$$

e a questo punto si conclude osservando che \mathbb{Z} non ha sottogruppi finiti non nulli. \square

TEOREMA 5.1.11. *Sia K un campo locale, allora $\text{Br } K \cong \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$.*

Dimostrazione. L'enunciato segue dai risultati intermedi già dimostrati, infatti si ha

$$\text{Br } K = H^2(\text{Spec } K, \mathbb{G}_m) \cong H^2(\text{Spec } A, i_*\mathbb{Z}) \cong H^2(\text{Spec } k, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Q}/\mathbb{Z}. \square$$

5.2 CAMPI GLOBALI DI CARATTERISTICA POSITIVA

Sia X una curva algebrica irriducibile liscia e completa su un campo finito k . Supponiamo inoltre che X sia geometricamente connessa, ossia se \bar{k} è una chiusura separabile di k allora lo schema $X \times_{\text{Spec } k} \text{Spec } \bar{k}$ è connesso. In particolare X è uno schema integro e regolare per cui ha un solo punto generico $\text{Spec } K$, dove K è il campo delle funzioni razionali su X . Il campo K è anche detto *campo globale*.

Osserviamo che come spazio topologico X è costituito dal punto generico e dai punti chiusi. Indichiamo con $g: \text{Spec } K \rightarrow X$ l'inclusione del punto generico, e se $x \in X$ è un punto chiuso denotiamo con $i_x: \text{Spec } k(x) \rightarrow X$ l'inclusione corrispondente. Allora nella suc-

cessione esatta (5.1) l'insieme $X^{(1)}$ è costituito dai punti chiusi di X (dal momento che X ha dimensione 1). Da questa successione di fasci ricaviamo la successione esatta lunga in coomologia

$$(5.3) \quad \cdots \rightarrow H^r(X, \mathbb{G}_m) \rightarrow H^r(X, g_* \mathbb{G}_m) \rightarrow \bigoplus_{x \in X^{(1)}} H^r(X, i_{x*} \mathbb{Z}) \\ \rightarrow H^{r+1}(X, \mathbb{G}_m) \rightarrow \cdots,$$

dove abbiamo usato che la coomologia étale commuta con le somme dirette (proposizione 4.6.4).

DEFINIZIONE 5.2.1. Un omomorfismo di anelli $f: A \rightarrow B$ si dice *regolare* se f è piatto e per ogni $\mathfrak{p} \in \text{Spec } A$ e per ogni estensione finita $k(\mathfrak{p}) \subset L$, l'anello $B \otimes_A L$ è regolare.

DEFINIZIONE 5.2.2. Un anello noetheriano A si dice un *G-anello* se per ogni $\mathfrak{p} \in \text{Spec } A$ l'omomorfismo $A_{\mathfrak{p}} \rightarrow \widehat{A}_{\mathfrak{p}}$ è regolare, dove $\widehat{A}_{\mathfrak{p}}$ indica il completamento di A rispetto alla topologia \mathfrak{p} -adica.

LEMMA 5.2.3. Sia X una curva algebrica su un campo k , allora per ogni punto geometrico $\bar{x} = \text{Spec } \bar{k}$, l'anello $\mathcal{O}_{X, \bar{x}}^{\text{sh}}$ è un G-anello.

Dimostrazione. Innanzi tutto osserviamo che $A = \mathcal{O}_{X, \bar{x}}^{\text{sh}}$ è un anello di valutazione discreta con campo dei residui \bar{k} , dunque $\text{Spec } A$ contiene solo l'ideale nullo \mathfrak{p} e l'ideale massimale \mathfrak{m} . Si ha che $A_{\mathfrak{p}}$ è il campo dei quozienti di A che indichiamo con $K_{\bar{x}}$, per cui si vede facilmente che $\widehat{K}_{\bar{x}} \otimes_{K_{\bar{x}}} K'$ è regolare per ogni estensione finita $K_{\bar{x}} \subset K'$. Analogamente abbiamo che $A_{\mathfrak{m}} = A$, e per ogni estensione finita $K_{\bar{x}} \subset K'$ l'anello $\widehat{A} \otimes_A K_{\bar{x}} \otimes_{K_{\bar{x}}} K' = \widehat{K}_{\bar{x}} \otimes_{K_{\bar{x}}} K'$ è regolare. Infine notiamo che anche $\widehat{A} \otimes_A \bar{k}$ è regolare, il che conclude la dimostrazione. \square

LEMMA 5.2.4. Sia $A \rightarrow B$ un omomorfismo regolare, fedelmente piatto. Se A è ridotto allora B è ridotto.

Dimostrazione. Si veda Matsumura [18, I.8.21]. \square

LEMMA 5.2.5. Sia $K \subset L$ un'estensione algebrica di campi. Allora $K \subset L$ è separabile se e solo se $L \otimes_K K'$ è ridotto per ogni estensione finita $K \subset K'$.

Dimostrazione. Si veda Matsumura [18, II.10.27]. \square

PROPOSIZIONE 5.2.6. Data una curva algebrica X su un campo finito k , e sia $g: \text{Spec } K \rightarrow X$ l'inclusione del punto generico, allora

$$H^r(X, g_* \mathbb{G}_m) \cong H^r(\text{Spec } K, \mathbb{G}_m), \quad \text{per ogni } r \geq 0.$$

Dimostrazione. Scriviamo la successione spettrale di Leray per l'inclusione $g: \text{Spec } K \rightarrow X$,

$$H^p(X, R^q g_* \mathbf{G}_m) \Rightarrow H^{p+q}(\text{Spec } K, \mathbf{G}_m).$$

Basta mostrare che $R^q g_* \mathbf{G}_m = 0$ per ogni $q > 0$. A tal fine consideriamo la spiga in un punto geometrico \bar{x} di X ; per la proposizione 4.6.7,

$$(R^q g_* \mathbf{G}_m)_{\bar{x}} \cong H^q(\text{Spec } K_{\bar{x}}, \mathbf{G}_m)$$

dove $K_{\bar{x}}$ indica il campo dei quozienti dell'anello strettamente henseliano di X in \bar{x} . Possiamo notare che dal momento che X ha dimensione 1 e k è perfetto, $K_{\bar{x}}$ è il campo dei quozienti di un anello di valutazione discreta con campo dei residui algebricamente chiuso. Allora per i lemmi appena dimostrati, $K_{\bar{x}}$ è un G -anello (in quanto localizzazione di un G -anello), e l'estensione $K_{\bar{x}} \subset \widehat{K}_{\bar{x}}$ è separabile, dove $\widehat{K}_{\bar{x}}$ indica il campo dei quozienti del completamento di $\mathcal{O}_{X, \bar{x}}^{\text{sh}}$. Quindi per il teorema 3.2.4 $K_{\bar{x}}$ è quasi-algebricamente chiuso. Di conseguenza $H^q(\text{Spec } K_{\bar{x}}, \mathbf{G}_m) = 0$ per ogni $q > 0$, e quindi $R^q g_* \mathbf{G}_m = 0$ per $q > 0$. \square

PROPOSIZIONE 5.2.7. *Siano X una curva algebrica e $x = \text{Spec } k(x)$ un punto chiuso di X . Allora*

$$H^r(X, i_{x*} \mathbf{Z}) \cong H^r(\text{Spec } k(x), \mathbf{Z}), \quad \text{per ogni } r \geq 0,$$

dove $i_x: \text{Spec } k(x) \rightarrow X$ è l'inclusione.

Dimostrazione. Scriviamo la successione spettrale di Leray per la mappa $i_x: \text{Spec } k(x) \rightarrow X$,

$$H^p(X, R^q i_{x*} \mathbf{Z}) \Rightarrow H^{p+q}(\text{Spec } k(x), \mathbf{Z}).$$

Dal momento che x è un punto chiuso di X , l'inclusione i_x è un'immersione chiusa, per cui il funtore i_{x*} è esatto (proposizione 4.4.9). Allora $R^q i_{x*} \mathbf{Z} = 0$ per ogni $q > 0$, quindi la successione di Leray degenera, e si ha

$$H^r(X, i_{x*} \mathbf{Z}) \cong H^r(\text{Spec } k(x), \mathbf{Z}), \quad \text{per ogni } r \geq 0. \quad \square$$

Osserviamo che se $\text{Spec } k(x)$ è un punto chiuso di X allora $k \subset k(x)$ è un'estensione finita di campi (dal momento che la composizione

$\text{Spec } k(x) \rightarrow X \rightarrow \text{Spec } k$ è étale), per cui $k(x)$ è ancora un campo finito. Quindi per la proposizione 5.1.10 abbiamo

$$H^r(\text{Spec } k(x), \mathbb{Z}) = H^r(\widehat{\mathbb{Z}}, \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & r = 0 \\ 0 & r = 1 \\ \mathbb{Q}/\mathbb{Z} & r = 2 \\ 0 & r > 2. \end{cases}$$

Prendendo in considerazione i primi termini della successione (5.3), otteniamo la successione esatta

$$(5.4) \quad 0 \rightarrow H^2(X, \mathbb{G}_m) \rightarrow H^2(\text{Spec } K, \mathbb{G}_m) \rightarrow \bigoplus_{x \in X^{(1)}} \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \rightarrow H^3(X, \mathbb{G}_m).$$

Definiamo ora lo schema $\bar{X} = X \times_{\text{Spec } k} \text{Spec } \bar{k}$, dove \bar{k} è una chiusura separabile (e quindi anche algebrica) di k . Possiamo notare che \bar{X} è una curva algebrica liscia sul campo algebricamente chiuso \bar{k} . Inoltre $\bar{X} \rightarrow X$ è un rivestimento di Galois con gruppo di Galois $\widehat{\mathbb{Z}}$, dal momento che $\text{Spec } \bar{k} \rightarrow \text{Spec } k$ lo è e \bar{X} è ottenuto da $\text{Spec } \bar{k}$ per cambiamento di base. Scriviamo quindi la successione di Hochschild-Serre

$$H^p(\widehat{\mathbb{Z}}, H^q(\bar{X}, \mathbb{G}_m)) \Rightarrow H^{p+q}(X, \mathbb{G}_m).$$

Sia poi \bar{K} il campo delle funzioni razionali di \bar{X} .

PROPOSIZIONE 5.2.8. *Sia \bar{K} il campo delle funzioni razionali di una curva algebrica su un campo algebricamente chiuso \bar{k} , allora \bar{K} è quasi-algebricamente chiuso.*

Dimostrazione. L'asserzione segue direttamente dal teorema 3.2.2, poiché \bar{K} è un campo di funzioni su \bar{k} di grado di trascendenza 1. □

COROLLARIO 5.2.9. *Se \bar{K} è il campo delle funzioni razionali di una curva algebrica su un campo algebricamente chiuso, allora*

$$H^r(\text{Spec } \bar{K}, \mathbb{G}_m) = 0, \quad \text{per ogni } r > 0.$$

Denotiamo con $\bar{g}: \text{Spec } \bar{K} \rightarrow \bar{X}$ l'inclusione del punto generico. Consideriamo inoltre la successione analoga alla (5.3) per \bar{X} ,

$$\begin{aligned} \dots \rightarrow H^r(\bar{X}, \mathbb{G}_m) \rightarrow H^r(\bar{X}, \bar{g}_* \mathbb{G}_m) &\rightarrow \bigoplus_{\bar{x} \in \bar{X}^{(1)}} H^r(\bar{X}, i_{\bar{x}*} \mathbb{Z}) \\ &\rightarrow H^{r+1}(\bar{X}, \mathbb{G}_m) \rightarrow \dots \end{aligned}$$

PROPOSIZIONE 5.2.10. *Data una curva algebrica \bar{X} su un campo algebricamente chiuso, si ha*

$$H^r(\bar{X}, \bar{g}_* \mathbf{G}_m) = 0, \quad \text{per ogni } r > 0,$$

dove $\bar{g}: \text{Spec } \bar{K} \rightarrow \bar{X}$ è l'inclusione del punto generico.

Dimostrazione. Innanzi tutto vediamo che con ragionamenti analoghi a quelli fatti nel caso di X , si dimostra che $R^q \bar{g}_* \mathbf{G}_m = 0$ per ogni $q > 0$. Da questo segue, considerando la successione di Leray per la mappa $\bar{g}: \text{Spec } \bar{K} \rightarrow \bar{X}$, che

$$H^r(\bar{X}, \bar{g}_* \mathbf{G}_m) \cong H^r(\text{Spec } \bar{K}, \mathbf{G}_m), \quad \text{per ogni } r \geq 0.$$

Infine per il corollario precedente si ha la tesi. \square

PROPOSIZIONE 5.2.11. *Sia \bar{X} una curva algebrica su un campo algebricamente chiuso \bar{k} , e sia $\bar{x} = \text{Spec } k(\bar{x})$ un punto chiuso di \bar{X} , allora*

$$H^r(\bar{X}, i_{\bar{x}*} \mathbf{Z}) = 0, \quad \text{per ogni } r > 0,$$

dove $i_{\bar{x}}: \text{Spec } k(\bar{x}) \rightarrow \bar{X}$ è l'inclusione.

Dimostrazione. In maniera del tutto analoga a quanto fatto nel caso di X , si mostra che se $\bar{x} = \text{Spec } k(\bar{x})$ è un punto chiuso di \bar{X} , allora

$$H^r(\bar{X}, i_{\bar{x}*} \mathbf{Z}) \cong H^r(\text{Spec } k(\bar{x}), \mathbf{Z})$$

per ogni $r \geq 0$. Osserviamo inoltre che $k(\bar{x})$ è un'estensione finita e separabile di \bar{k} , per cui $k(\bar{x}) = \bar{k}$ e $H^r(\text{Spec } \bar{k}, \mathbf{Z}) = 0$ per $r > 0$, dal momento che \bar{k} è algebricamente chiuso. \square

Da queste due proposizioni e dalla successione esatta lunga in coomologia si ricava immediatamente il seguente risultato.

COROLLARIO 5.2.12. *Data una curva algebrica \bar{X} su un campo algebricamente chiuso, si ha*

$$H^r(\bar{X}, \mathbf{G}_m) = 0, \quad \text{per ogni } r > 1.$$

PROPOSIZIONE 5.2.13. *Sia X una curva algebrica liscia e completa su un campo finito k , e sia $\bar{X} = X \times_{\text{Spec } k} \text{Spec } \bar{k}$, dove \bar{k} è una chiusura separabile di k . Allora*

$$H^r(X, \mathbf{G}_m) \cong H^{r-1}(\hat{\mathbf{Z}}, \text{Pic}(\bar{X})), \quad \text{per ogni } r > 1.$$

Dimostrazione. Per il corollario precedente nella successione di Hochschild-Serre i gruppi $H^p(\widehat{\mathcal{Z}}, H^q(\overline{X}, \mathbb{G}_m))$ sono tutti nulli per $q > 1$ e $p \geq 0$. D'altra parte

$$H^p(\widehat{\mathcal{Z}}, H^0(\overline{X}, \mathbb{G}_m)) = H^p(\widehat{\mathcal{Z}}, \bar{k}^*) = H^p(\text{Spec } k, \mathbb{G}_m) = 0,$$

per ogni $p > 0$. In definitiva la successione spettrale degenera e si ha

$$H^p(X, \mathbb{G}_m) \cong H^{p-1}(\widehat{\mathcal{Z}}, H^1(\overline{X}, \mathbb{G}_m)) = H^{p-1}(\widehat{\mathcal{Z}}, \text{Pic}(\overline{X})),$$

per ogni $p \geq 1$. □

Consideriamo la seguente successione esatta

$$0 \rightarrow \text{Pic}^0(\overline{X}) \rightarrow \text{Pic}(\overline{X}) \xrightarrow{\text{deg}} \mathbb{Z} \rightarrow 0,$$

dove deg è la mappa grado e $\text{Pic}^0(\overline{X}) = \ker(\text{deg})$. Abbiamo una successione esatta lunga in coomologia

$$(5.5) \quad \cdots \rightarrow H^r(\widehat{\mathcal{Z}}, \text{Pic}^0(\overline{X})) \rightarrow H^r(\widehat{\mathcal{Z}}, \text{Pic}(\overline{X})) \rightarrow H^r(\widehat{\mathcal{Z}}, \mathbb{Z}) \\ \rightarrow H^{r+1}(\widehat{\mathcal{Z}}, \text{Pic}^0(\overline{X})) \rightarrow \cdots$$

DEFINIZIONE 5.2.14. Dato un campo k , una *varietà abeliana* su k è una varietà algebrica proiettiva liscia $Y \rightarrow \text{Spec } k$, che è uno schema in gruppi.

TEOREMA 5.2.15. *Sia $X \rightarrow \text{Spec } k$ una curva algebrica liscia e geometricamente connessa su un campo k , allora esiste una varietà abeliana irriducibile $J \rightarrow \text{Spec } k$, detta la Jacobiana di X , tale che $\text{Pic}^0(X) \cong J(k)$, dove $J(k)$ indica i punti k -razionali di J .*

Dimostrazione. Si veda Cornell e Silverman [8, IV.4]. □

COROLLARIO 5.2.16. *Data una curva algebrica liscia e geometricamente connessa \overline{X} su un campo algebricamente chiuso \bar{k} , il gruppo $\text{Pic}^0(\overline{X})$ è divisibile.*

Dimostrazione. Per il teorema precedente si ha $\text{Pic}^0(\overline{X}) \cong \bar{J}(\bar{k})$, dove \bar{J} è una varietà abeliana. Dato un numero naturale n , la moltiplicazione per n che indichiamo con

$$n: \bar{J} \longrightarrow \bar{J},$$

ha nucleo finito (si veda Mumford [20, IV.21]), di conseguenza tutte le fibre sono finite (perché la mappa n è un omomorfismo di gruppi). Allora l'immagine di n è un chiuso di \bar{J} di uguale dimensione, e dal momento che \bar{J} è irriducibile, la mappa n è suriettiva. In particolare è

suriettiva la moltiplicazione per n da $\text{Pic}^0(\bar{X})$ in sé, e dunque $\text{Pic}^0(\bar{X})$ è divisibile. \square

COROLLARIO 5.2.17. *Data una curva algebrica liscia e geometricamente connessa \bar{X} su un campo algebricamente chiuso, si ha*

$$H^r(\widehat{\mathbb{Z}}, \text{Pic}^0(\bar{X})) = 0, \quad \text{per ogni } r > 1.$$

Dimostrazione. Segue direttamente dalla proposizione 1.5. \square

Sia $J \rightarrow \text{Spec } k$ la Jacobiana di X , allora si può vedere che la Jacobiana di $\bar{X} = X \times_{\text{Spec } k} \text{Spec } \bar{k}$ è $\bar{J} = J \times_{\text{Spec } k} \text{Spec } \bar{k}$. Definiamo il morfismo di Frobenius su J ,

$$F: J \rightarrow J,$$

richiedendo che sia l'identità sugli spazi topologici, e che l'omomorfismo dei fasci strutturali $\mathcal{O}_J \rightarrow \mathcal{O}_J$ sia dato da $s \mapsto s^q$, dove q è la cardinalità di k . Osserviamo che questo è un omomorfismo di fasci di k -algebre. Definiamo inoltre il morfismo di Frobenius su \bar{J} ,

$$\bar{F}: \bar{J} \rightarrow \bar{J},$$

come il morfismo ottenuto da F per cambiamento di base.

TEOREMA 5.2.18 (Lang). *Sia X una curva algebrica liscia e completa su un campo finito k , e sia $\bar{X} = X \times_{\text{Spec } k} \text{Spec } \bar{k}$, dove \bar{k} è una chiusura separabile di k . Sia poi \bar{F} il morfismo di Frobenius sulla Jacobiana di \bar{X} , allora la mappa*

$$1 - \bar{F}: \text{Pic}^0(\bar{X}) \rightarrow \text{Pic}^0(\bar{X})$$

è suriettiva.

Dimostrazione. Si veda Mumford [20, IV.21.3]. \square

COROLLARIO 5.2.19. *Sia X una curva algebrica liscia e completa su un campo finito k , e sia $\bar{X} = X \times_{\text{Spec } k} \text{Spec } \bar{k}$, dove \bar{k} è una chiusura separabile di k . Allora*

$$H^1(\widehat{\mathbb{Z}}, \text{Pic}^0(\bar{X})) = 0.$$

Dimostrazione. Si può notare che il morfismo di Frobenius \bar{F} è un generatore dell'azione di $\widehat{\mathbb{Z}} = \text{Gal}(\bar{k}/k)$ su $\text{Pic}^0(\bar{X})$. Ricordiamo ora la definizione del primo gruppo di coomologia di Galois,

$$H^1(\widehat{\mathbb{Z}}, \text{Pic}^0(\bar{X})) = \frac{\mathbb{Z}^1}{\mathbb{B}^0},$$

dove

$$Z^1 = \left\{ f: \widehat{\mathcal{Z}} \rightarrow \text{Pic}^0(\overline{X}) \mid f(g_1 g_2) = f(g_1) + g_1 f(g_2) \right\},$$

$$B^0 = \left\{ f: \widehat{\mathcal{Z}} \rightarrow \text{Pic}^0(\overline{X}) \mid f(g) = g a - a, a \in \text{Pic}^0(\overline{X}) \right\}.$$

Osserviamo che un elemento $f \in Z^1$ è univocamente determinato da $f(\overline{F}) \in \text{Pic}^0(\overline{X})$, per cui

$$Z^1 \cong \text{Pic}^0(\overline{X}).$$

Allo stesso modo un elemento $f \in B^0$ è univocamente determinato da $f(\overline{F}) = \overline{F}(a) - a$, per un certo $a \in \text{Pic}^0(\overline{X})$; di conseguenza

$$B^0 \cong \text{im}(\overline{F} - 1: \text{Pic}^0(\overline{X}) \rightarrow \text{Pic}^0(\overline{X})).$$

In definitiva si ha

$$H^1(\widehat{\mathcal{Z}}, \text{Pic}^0(\overline{X})) \cong \text{coker}(\overline{F} - 1) = 0,$$

poiché per il teorema precedente la mappa $\overline{F} - 1$ è suriettiva. \square

Dunque dalla successione esatta in coomologia (5.5) ricaviamo

$$H^r(\widehat{\mathcal{Z}}, \text{Pic}(\overline{X})) \cong H^r(\widehat{\mathcal{Z}}, \mathcal{Z}), \quad \text{per ogni } r \geq 1.$$

In particolare, per la proposizione 5.2.13, si ha

$$H^r(X, \mathbb{G}_m) = \begin{cases} k^* & r = 0 \\ \text{Pic}(X) & r = 1 \\ 0 & r = 2 \\ \mathbb{Q}/\mathbb{Z} & r = 3 \\ 0 & r > 3. \end{cases}$$

TEOREMA 5.2.20. *Sia X una curva algebrica liscia, geometricamente connessa e completa su un campo finito k , e sia K il campo delle funzioni razionali. Allora si ha la successione esatta*

$$0 \rightarrow \text{Br}(K) \rightarrow \bigoplus_{x \in X^{(1)}} \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \xrightarrow{\psi} \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \rightarrow 0,$$

dove la mappa ψ è definita da

$$\psi((a_x)_{x \in X^{(1)}}) = \sum_{x \in X^{(1)}} [k(x) : k] a_x.$$

Dimostrazione. Innanzi tutto possiamo riscrivere la successione esatta (5.4) nella forma

$$0 \rightarrow \text{Br}(K) \rightarrow \bigoplus_{x \in X^{(1)}} \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \xrightarrow{\psi} \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$

Vogliamo ora descrivere la mappa ψ . Per fare questo, reinterpretiamo i gruppi \mathbb{Q}/\mathbb{Z} in termini di gruppi di coomologia. Ricordiamo perciò che se $x = \text{Spec } k(x)$ è un punto chiuso di X , allora il gruppo \mathbb{Q}/\mathbb{Z} corrispondente era isomorfo a $H^2(\text{Spec } k(x), \mathbb{Z})$, mentre l'ultimo gruppo \mathbb{Q}/\mathbb{Z} nella successione era isomorfo a

$$H^3(X, \mathbb{G}_m) \cong H^2(\text{Gal}(\bar{k}/k), \text{Pic}(\bar{X})) \cong H^2(\text{Gal}(\bar{k}/k), \mathbb{Z}) \cong H^2(\text{Spec } k, \mathbb{Z}).$$

Fissiamo un punto chiuso $x = \text{Spec } k(x)$, allora l'estensione di campi $k \subset k(x)$ è finita e separabile. Consideriamo poi l'aperto $U = X \setminus \{x\}$ e la successione di fasci

$$(5.6) \quad 0 \rightarrow \mathbb{G}_{m,X} \rightarrow j_* \mathbb{G}_{m,U} \rightarrow i_{x*} \mathbb{Z} \rightarrow 0,$$

dove $j: U \rightarrow X$ è l'inclusione. Questa successione è in realtà esatta, come si verifica sulle spighe. Infatti il fascio $j_* \mathbb{G}_{m,U}$ è concentrato in x , e se $\bar{x} = \text{Spec } \bar{k}$ è un punto geometrico di X che ha immagine x , allora la successione delle spighe è

$$0 \rightarrow \Gamma(\text{Spec } \mathcal{O}_{X,\bar{x}}^{\text{sh}}, \mathbb{G}_m) \rightarrow \Gamma(\text{Spec } K_{\bar{x}}, \mathbb{G}_m) \rightarrow \Gamma(\text{Spec } \bar{k}, \mathbb{Z}) \rightarrow 0,$$

dove $K_{\bar{x}}$ è il campo dei quozienti di $\mathcal{O}_{X,\bar{x}}^{\text{sh}}$. Osserviamo che dalla successione di Leray per la mappa j si trova che

$$H^r(X, j_* \mathbb{G}_{m,U}) \cong H^r(U, \mathbb{G}_{m,U})$$

per ogni $r \geq 0$ (si procede come già fatto per l'inclusione del punto generico). Utilizzando poi la proposizione 5.2.7, otteniamo una successione esatta in coomologia della forma

$$H^2(U, \mathbb{G}_{m,U}) \rightarrow H^2(\text{Spec } k(x), \mathbb{Z}) \rightarrow H^3(X, \mathbb{G}_{m,X}) \rightarrow H^3(U, \mathbb{G}_{m,U}).$$

Inoltre si ha il seguente diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccccccc} H^2(U, \mathbb{G}_m) & \longrightarrow & H^2(k(x), \mathbb{Z}) & \xrightarrow{\psi_x} & H^3(X, \mathbb{G}_m) & \longrightarrow & H^3(U, \mathbb{G}_m) \\ \downarrow & & \downarrow & & \parallel & & \downarrow \\ H^2(K, \mathbb{G}_m) & \longrightarrow & \bigoplus_{y \in X^{(1)}} H^2(k(y), \mathbb{Z}) & \xrightarrow{\psi} & H^3(X, \mathbb{G}_m) & \longrightarrow & H^3(K, \mathbb{G}_m) \end{array}$$

da cui segue che per capire la mappa ψ basta studiare le mappe ψ_x .

Supponiamo ora $k(x) = k$ e consideriamo lo schema

$$\bar{U} = U \times_{\text{Spec } k} \text{Spec } \bar{k}.$$

Analogamente a quanto visto per \bar{X} , si può vedere che $H^r(\bar{U}, \mathbf{G}_m) = 0$ per ogni $r \geq 2$. Di conseguenza dalla successione di Hochschild-Serre per il ricoprimento $\bar{U} \rightarrow U$ si ricava che

$$H^r(U, \mathbf{G}_m) \cong H^{r-1}(\hat{\mathbb{Z}}, \text{Pic}(\bar{U}))$$

per ogni $r > 1$. D'altra parte

$$\bar{U} = \bar{X} \setminus \text{Spec} \left(k(x) \otimes_k \bar{k} \right) = \bar{X} \setminus \text{Spec } \bar{k} = \bar{X} \setminus \{\bar{x}\},$$

dove abbiamo posto $\bar{x} = \text{Spec } \bar{k}$. Allora dalla successione per \bar{X} analoga alla (5.6) si ottiene la successione esatta

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \text{Pic}(\bar{X}) \rightarrow \text{Pic}(\bar{U}) \rightarrow 0,$$

da cui si trova $\text{Pic}(\bar{U}) \cong \text{Pic}^0(\bar{X})$ e notiamo che questo isomorfismo è $\hat{\mathbb{Z}}$ -equivariante. Ne consegue, per i corollari 5.2.17 e 5.2.19, che $H^r(\hat{\mathbb{Z}}, \text{Pic}(\bar{U})) = 0$ per $r > 0$, e in particolare

$$H^2(U, \mathbf{G}_m) = H^3(U, \mathbf{G}_m) = 0.$$

Dunque nel caso in cui $k(x) = k$, la mappa

$$\psi_x: H^2(\text{Spec } k(x), \mathbb{Z}) \rightarrow H^3(X, \mathbf{G}_m)$$

è un isomorfismo.

Nel caso generale, consideriamo lo schema $X_x = X \times_{\text{Spec } k} \text{Spec } k(x)$ e la mappa $\pi: X_x \rightarrow X$. Vediamo che la fibra di x ,

$$\pi^{-1}(x) = \text{Spec } k(x) \otimes_k k(x),$$

è costituita da $n = [k(x) : k]$ punti distinti che indichiamo con x_1, \dots, x_n , tali che $k(x_i) = k(x)$ per ogni i . Poniamo

$$U_x = U \times_X X_x = X_x \setminus \{x_1, \dots, x_n\},$$

e consideriamo il pullback rispetto alla mappa π della successione (5.6), tenendo presente che π^* in questo caso è semplicemente la restrizione all'aperto X_x . Otteniamo così la successione

$$0 \rightarrow \mathbf{G}_{m, X_x} \rightarrow j_{x*} \mathbf{G}_{m, U_x} \rightarrow \bigoplus_{i=1}^n i_{x_i*} \mathbb{Z} \rightarrow 0,$$

dove al solito $j_x: U_x \rightarrow X_x$ e $i_{x_i}: x_i \rightarrow X_x$ sono le inclusioni. Osserviamo che per quanto visto sopra,

$$\psi_{x_i}: H^2(\text{Spec } k(x_i), \mathbb{Z}) \rightarrow H^3(X_x, \mathbb{G}_m)$$

è un isomorfismo. Perciò si ha il seguente diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccc} H^2(\text{Spec } k(x_i), \mathbb{Z}) & \xrightarrow{\psi_{x_i}} & H^3(X_x, \mathbb{G}_m) \\ \alpha_i \uparrow & & \uparrow \\ H^2(\text{Spec } k(x), \mathbb{Z}) & \longrightarrow & H^3(X, \mathbb{G}_m) \end{array}$$

Dal momento che $X_x \rightarrow X$ è un rivestimento di Galois con gruppo di Galois $H = \text{Gal}(k(x)/k)$, dati due punti x_i e x_j esiste un unico elemento $h \in H$ tale che $hx_i = x_j$ (quindi h corrisponde a un isomorfismo $k(x_i) \cong k(x_j)$). Di conseguenza H agisce su $H^3(X_x, \mathbb{G}_m)$ come si vede dal seguente diagramma

$$\begin{array}{ccc} H^2(\text{Spec } k(x_i), \mathbb{Z}) & \xrightarrow{\psi_{x_i}} & H^3(X_x, \mathbb{G}_m) \\ h \uparrow & & \uparrow h \\ H^2(\text{Spec } k(x_j), \mathbb{Z}) & \xrightarrow{\psi_{x_j}} & H^3(X_x, \mathbb{G}_m) \end{array}$$

Vogliamo mostrare che questa azione è banale, poiché da questo segue che la composizione $\psi_{x_i} \circ \alpha_i$ non dipende dal punto x_i .

Consideriamo lo schema $\bar{X} = X \times_{\text{Spec } k} \text{Spec } \bar{k}$, dove \bar{k} è una chiusura separabile di k . Poniamo $G = \text{Gal}(\bar{k}/k)$ e $G_x = \text{Gal}(\bar{k}/k(x))$. Allora abbiamo il diagramma

$$\begin{array}{ccc} H^p(G_x, H^q(\bar{X}, \mathbb{G}_m)) & \Longrightarrow & H^{p+q}(X_x, \mathbb{G}_m) \\ \uparrow & & \uparrow \\ H^p(G, H^q(\bar{X}, \mathbb{G}_m)) & \Longrightarrow & H^{p+q}(X, \mathbb{G}_m) \end{array}$$

le cui righe sono date dalle successioni spettrali di Hochschild-Serre, e per la proposizione 5.2.13 si ha

$$\begin{array}{ccc} H^2(G_x, \mathbb{Z}) & \xrightarrow{\sim} & H^3(X_x, \mathbb{G}_m) \\ n \uparrow & & \uparrow \\ H^2(G, \mathbb{Z}) & \xrightarrow{\sim} & H^3(X, \mathbb{G}_m) \end{array}$$

Osserviamo che il gruppo G agisce banalmente su $H^2(G, \mathbb{Z})$ (si veda Serre [22, VII.5.3]), quindi anche l'azione su $H^3(X, \mathbb{G}_m)$ è banale. D'altra parte la mappa $H^3(X, \mathbb{G}_m) \rightarrow H^3(X_x, \mathbb{G}_m)$ è suriettiva e G -equivariante, per cui $H \cong G/G_x$ agisce banalmente su $H^3(X_x, \mathbb{G}_m)$.

Di conseguenza la composizione $\psi_{x_i} \circ \alpha_i$ non dipende da i , e possiamo identificare i gruppi

$$\begin{aligned} H^2(\text{Spec } k(x), \mathbb{Z}) &\cong H^2(\text{Spec } k(x_i), \mathbb{Z}) \cong H^3(X_x, \mathbb{G}_m) \\ &\cong H^3(X, \mathbb{G}_m) \cong \mathbb{Q}/\mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Con questa identificazione, dal diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccc} \prod_{i=1}^n H^2(\text{Spec } k(x_i), \mathbb{Z}) & \xrightarrow{\bar{\psi}} & H^3(X_x, \mathbb{G}_m) \\ \uparrow & & \uparrow \\ H^2(\text{Spec } k(x), \mathbb{Z}) & \xrightarrow{\psi_x} & H^3(X, \mathbb{G}_m) \end{array}$$

si deduce che

$$\psi_x(a) = \bar{\psi}(a, \dots, a) = \sum_{i=1}^n \psi_{x_i}(a) = \sum_{i=1}^n a = na,$$

per ogni $a \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \cong H^2(\text{Spec } k(x), \mathbb{Z})$. \square

5.3 IL CAMPO $\mathbb{C}(x, y)$

Per concludere, vogliamo presentare la descrizione del gruppo di Brauer del campo delle funzioni razionali in due variabili $\mathbb{C}(x, y)$. Enunciamo innanzi tutto alcune proprietà algebriche di questo campo.

TEOREMA 5.3.1. *La dimensione coomologica di $\mathbb{C}(x, y)$ è 2.*

Dimostrazione. Il campo dei numeri complessi è algebricamente chiuso, e quindi ha dimensione coomologica 0. Allora per il teorema 3.2.6

$$\text{cd}_p \mathbb{C}(x, y) = \text{trdeg}_{\mathbb{C}} \mathbb{C}(x, y) + \text{cd}_p \mathbb{C} = 2$$

per ogni primo p (abbiamo indicato con $\text{trdeg}_{\mathbb{C}} \mathbb{C}(x, y)$ il grado di trascendenza di $\mathbb{C}(x, y)$ su \mathbb{C}). Da questo segue $\text{cd} \mathbb{C}(x, y) = 2$, poiché $\text{cd}_p \mathbb{C} = 0$ per ogni primo p . \square

COROLLARIO 5.3.2. *Si ha $H^r(\text{Spec } \mathbb{C}(x, y), \mathbb{G}_m) = 0$, per ogni $r > 2$.*

Dimostrazione. Osserviamo che i gruppi di coomologia di $\text{Spec } \mathbb{C}(x, y)$ possono essere interpretati come gruppi di coomologia di Galois, in particolare abbiamo che $H^r(\text{Spec } \mathbb{C}(x, y), \mathbb{G}_m)$ è di torsione per ogni $r > 0$ (corollario 1.4). Consideriamo il seguente diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{G}_m & \xrightarrow{n} & \mathbb{G}_m \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \parallel & & \wr \downarrow \frac{h}{n} \\ 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z}/h\mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{G}_m & \xrightarrow{h} & \mathbb{G}_m \longrightarrow 0 \end{array}$$

dove le righe sono date dalle successioni di Kummer (in questo caso $\mu_n \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$), e le mappe sono quelle ovvie. Allora si ha un diagramma commutativo corrispondente in coomologia con le righe ancora esatte, e facendo il limite diretto su $n \in \mathbb{N}$ si ottiene

$$\begin{aligned} \dots &\rightarrow H^{r-1}(\text{Spec } \mathbb{C}(x, y), \mathbb{G}_m) \otimes \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \rightarrow \varinjlim_n H^r(\text{Spec } \mathbb{C}(x, y), \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \\ &\rightarrow H^r(\text{Spec } \mathbb{C}(x, y), \mathbb{G}_m) \rightarrow H^r(\text{Spec } \mathbb{C}(x, y), \mathbb{G}_m) \otimes \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \rightarrow \dots \end{aligned}$$

Ma per quanto appena osservato i gruppi $H^r(\text{Spec } \mathbb{C}(x, y), \mathbb{G}_m) \otimes \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ sono tutti nulli per $r > 0$; d'altra parte si ha anche

$$H^r(\text{Spec } \mathbb{C}(x, y), \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = 0$$

per $r > 2$, in quanto $\mathbb{C}(x, y)$ ha dimensione coomologica minore o uguale a 2 e $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ è un fascio di torsione. Quindi si ricava che

$$H^r(\text{Spec } \mathbb{C}(x, y), \mathbb{G}_m) \cong \varinjlim_n H^r(\text{Spec } \mathbb{C}(x, y), \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = 0,$$

per ogni $r > 2$. □

Consideriamo ora il piano proiettivo complesso $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ con la topologia étale. Sappiamo che $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ è una superficie proiettiva liscia, irriducibile e completa. Inoltre il campo delle funzioni razionali di $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ è proprio $\mathbb{C}(x, y)$. Denotiamo con $g: \text{Spec } \mathbb{C}(x, y) \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ l'inclusione del punto generico.

Sia π un insieme finito di punti di codimensione 2 in $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ (ossia punti chiusi), e consideriamo le mappe

$$\begin{array}{ccc} \text{Spec } \mathbb{C}(x, y) & \xrightarrow{g} & \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \\ & \searrow g_{\pi} & \nearrow i_{\pi} \\ & \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \setminus \pi & \end{array}$$

Per la proposizione 4.5.5 esiste una successione esatta di fasci su $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \setminus \pi$ della forma

$$0 \rightarrow \mathbf{G}_m \rightarrow g_{\pi*} \mathbf{G}_m \rightarrow \bigoplus_{C_{\pi}} j_{C_{\pi}*} \mathbf{Z} \rightarrow 0,$$

dove C_{π} è un chiuso irriducibile di codimensione 1 di $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \setminus \pi$, e la mappa $j_{C_{\pi}}: \text{Spec } K_{C_{\pi}} \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \setminus \pi$ è l'inclusione del punto generico di C_{π} . Allora si ha una successione esatta lunga in coomologia

$$(5.7) \quad \begin{aligned} \cdots \rightarrow H^r(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \setminus \pi, \mathbf{G}_m) &\rightarrow H^r(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \setminus \pi, g_{\pi*} \mathbf{G}_m) \\ &\rightarrow \bigoplus_{C_{\pi}} H^r(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \setminus \pi, j_{C_{\pi}*} \mathbf{Z}) \rightarrow H^{r+1}(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \setminus \pi, \mathbf{G}_m) \rightarrow \cdots \end{aligned}$$

LEMMA 5.3.3. *Sia X uno schema integro di tipo finito su $\text{Spec } \mathbb{C}$. Allora per ogni primo p si ha*

$$\text{cd}_p K_{\bar{x}} = \dim \mathcal{O}_{X, \bar{x}}^{\text{sh}},$$

dove $K_{\bar{x}}$ denota il campo dei quozienti dell'anello $\mathcal{O}_{X, \bar{x}}^{\text{sh}}$.

Dimostrazione. Si veda Grothendieck et al. [15, X.3.2]. \square

PROPOSIZIONE 5.3.4. *Se π è un insieme finito di punti chiusi in $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$, allora*

$$H^r(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \setminus \pi, g_{\pi*} \mathbf{G}_m) = \begin{cases} \mathbb{C}(x, y)^* & r = 0 \\ 0 & r = 1 \\ H^{r-3}(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \setminus \pi, R^2 g_{\pi*} \mathbf{G}_m) & r > 2; \end{cases}$$

si ha inoltre la successione esatta

$$0 \rightarrow H^2(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \setminus \pi, g_{\pi*} \mathbf{G}_m) \rightarrow \text{Br } \mathbb{C}(x, y) \rightarrow H^0(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \setminus \pi, R^2 g_{\pi*} \mathbf{G}_m) \\ \rightarrow H^3(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \setminus \pi, g_{\pi*} \mathbf{G}_m) \rightarrow 0,$$

dove il fascio $R^2 g_{\pi*} \mathbf{G}_m$ è concentrato nei punti di π .

Dimostrazione. Scriviamo la successione di Leray associata all'inclusione del punto generico $g_{\pi}: \text{Spec } \mathbb{C}(x, y) \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \setminus \pi$,

$$H^p(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \setminus \pi, R^q g_{\pi*} \mathbf{G}_m) \Rightarrow H^{p+q}(\text{Spec } \mathbb{C}(x, y), \mathbf{G}_m).$$

Per la proposizione 4.6.7, la spiga di $R^q g_{\pi*} \mathbf{G}_m$ in un punto geometrico \bar{x} è isomorfa a $H^q(\text{Spec } K_{\bar{x}}, \mathbf{G}_m)$, dove $K_{\bar{x}}$ indica il campo dei quozienti dell'anello strettamente henseliano $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \setminus \pi, \bar{x}}^{\text{sh}}$.

Applichiamo il lemma 5.3.3 e otteniamo che $K_{\bar{x}}$ ha al più dimensione coomologica 2 in quanto la dimensione dell'anello $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \setminus \pi, \bar{x}}^{\text{sh}}$

In questo modo si ricava una successione esatta corta

$$0 \rightarrow E_4^{p,0} \rightarrow H^p \rightarrow E_4^{p-2,2} \rightarrow 0$$

da cui si ottiene la successione esatta

$$0 \rightarrow E_2^{p-3,2} \rightarrow E_2^{p,0} \rightarrow H^p \rightarrow E_2^{p-2,2} \rightarrow E_2^{p+1,0} \rightarrow 0$$

per ogni p , con la convenzione che i gruppi con esponenti negativi sono da considerarsi nulli. Traduciamo ora la successione in termini di gruppi di coomologia e ricaviamo

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow H^{p-3}(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \setminus \pi, R^2 g_{\pi*} \mathbf{G}_m) &\rightarrow H^p(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \setminus \pi, g_{\pi*} \mathbf{G}_m) \\ &\rightarrow H^p(\text{Spec } \mathbb{C}(x, y), \mathbf{G}_m) \rightarrow H^{p-2}(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \setminus \pi, R^2 g_{\pi*} \mathbf{G}_m) \\ &\rightarrow H^{p+1}(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \setminus \pi, g_{\pi*} \mathbf{G}_m) \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Ricordiamo che $H^p(\text{Spec } \mathbb{C}(x, y), \mathbf{G}_m) = 0$ per $p \neq 0, 2$, allora si trova che

$$H^p(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \setminus \pi, g_{\pi*} \mathbf{G}_m) = \begin{cases} \mathbb{C}(x, y)^* & p = 0 \\ 0 & p = 1 \\ H^{p-3}(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \setminus \pi, R^2 g_{\pi*} \mathbf{G}_m) & p > 2, \end{cases}$$

e per $p = 2$ si ha la successione esatta

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow H^2(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \setminus \pi, g_{\pi*} \mathbf{G}_m) &\rightarrow \text{Br } \mathbb{C}(x, y) \rightarrow H^0(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \setminus \pi, R^2 g_{\pi*} \mathbf{G}_m) \\ &\rightarrow H^3(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \setminus \pi, g_{\pi*} \mathbf{G}_m) \rightarrow 0. \quad \square \end{aligned}$$

Applicando questo risultato alla successione (5.7) e limitandoci ai primi gruppi di coomologia otteniamo

$$\begin{aligned} (5.8) \quad 0 \rightarrow \bigoplus_{C_{\pi}} H^1(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \setminus \pi, j_{C_{\pi}*} \mathbf{Z}) &\rightarrow H^2(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \setminus \pi, \mathbf{G}_m) \\ &\rightarrow H^2(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \setminus \pi, g_{\pi*} \mathbf{G}_m) \rightarrow \bigoplus_{C_{\pi}} H^2(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \setminus \pi, j_{C_{\pi}*} \mathbf{Z}) \\ &\rightarrow H^3(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \setminus \pi, \mathbf{G}_m) \rightarrow H^0(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \setminus \pi, R^2 g_{\pi*} \mathbf{G}_m). \end{aligned}$$

TEOREMA 5.3.5. *Dato uno schema regolare integro e noetheriano X , i gruppi $H^r(X, \mathbf{G}_m)$ sono di torsione per ogni $r \geq 2$.*

Dimostrazione. Siano x un punto di X e $i_x: \text{Spec } k(x) \rightarrow X$ l'inclusione corrispondente, allora se F è un fascio su $\text{Spec } k(x)$, i gruppi $H^r(\text{Spec } k(x), F)$ sono di torsione per ogni $r \geq 1$, poiché coincidono con i gruppi di coomologia di Galois (corollario 1.4). Verifichiamo

che anche i fasci $R^q i_{x*} F$ sono di torsione per $q \geq 1$. Basta guardare la spiga in un punto geometrico \bar{x} (proposizione 4.6.7),

$$(R^q i_{x*} F)_{\bar{x}} \cong H^q(\text{Spec } \mathcal{O}_{X, \bar{x}}^{\text{sh}} \times_X \text{Spec } k(x), F),$$

e osservare che $\text{Spec } \mathcal{O}_{X, \bar{x}}^{\text{sh}} \times_X \text{Spec } k(x)$ è un'unione finita di punti, essendo la controimmagine del punto x per la mappa $\text{Spec } \mathcal{O}_{X, \bar{x}}^{\text{sh}} \rightarrow X$. Dunque anche $H^p(X, R^q i_{x*} F)$ è di torsione per ogni $q \geq 1$ e $p \geq 0$. Allora dalla successione di Leray

$$H^p(X, R^q i_{x*} F) \Rightarrow H^{p+q}(\text{Spec } k(x), F)$$

si ricava che i gruppi $H^p(X, i_{x*} F)$ sono di torsione per ogni $p \geq 1$.

Consideriamo la successione esatta della proposizione 4.5.5

$$0 \rightarrow \mathbb{G}_m \rightarrow g_* \mathbb{G}_m \rightarrow \bigoplus_{x \in X^{(1)}} i_{x*} \mathbb{Z} \rightarrow 0,$$

dove g è l'inclusione del punto generico, $X^{(1)}$ è l'insieme dei punti di X di codimensione 1 e $i_x: x \rightarrow X$ è l'inclusione. Allora i gruppi $H^r(X, g_* \mathbb{G}_m)$ e $H^r(X, i_{x*} \mathbb{Z})$ sono di torsione per $r \geq 1$, e dalla successione esatta lunga in coomologia si ricava che $H^r(X, \mathbb{G}_m)$ è di torsione per ogni $r \geq 2$. \square

Consideriamo il fascio $\mu_n \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ su $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ e poniamo $\mu = \cup_n \mu_n$. Definiamo poi $\mu_n^{-1} = \text{Hom}(\mu_n, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ e $\mu^{-1} = \cup_n \mu_n^{-1}$. Possiamo notare che i fasci μ e μ^{-1} sono entrambi isomorfi a \mathbb{Q}/\mathbb{Z} .

Dati un campo k di caratteristica 0, due schemi regolari Z e X su $S = \text{Spec } k$, e un'immersione chiusa $\phi: Z \rightarrow X$, diciamo che (Z, X) è una S -coppia liscia. La coppia (Z, X) ha codimensione $c \in \mathbb{N}$ se per ogni punto $z \in Z$ vale che $\text{codim}_z(Z, X) = c$. Consideriamo inoltre $V = X \setminus \phi(Z)$ e $\psi: V \rightarrow X$ l'immersione aperta corrispondente.

TEOREMA 5.3.6 (di purezza). *Dati una S -coppia liscia (Z, X) di codimensione c e il fascio costante $F = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ su $X_{\text{ét}}$, allora*

$$(R^q \psi_*) \psi^* F = 0, \quad \text{per ogni } q \neq 0, 2c - 1,$$

e inoltre

$$\phi^*((R^{2c-1} \psi_*) \psi^* F) \cong \phi^* F \otimes \mu_n^{\otimes -c}.$$

Dimostrazione. Si veda Grothendieck *et al.* [15, XVI.3.7]. \square

LEMMA 5.3.7. Dato un insieme finito π di punti chiusi in $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$, si ha

$$R^q i_{\pi*} \mathbf{G}_m = \begin{cases} \bigoplus_{p \in \pi} \mu^{-1} & q = 3, \\ 0 & q \neq 0, 3. \end{cases}$$

Dimostrazione. Applicando il teorema di purezza alla coppia $(\pi, \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2)$ e al fascio μ_n , otteniamo

$$R^q i_{\pi*} \mu_n = 0, \quad \text{per ogni } q \neq 0, 3.$$

Inoltre se indichiamo con $\lambda_{\pi}: \pi \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ l'immersione chiusa data dall'inclusione, abbiamo

$$\lambda_{\pi}^*(R^3 i_{\pi*} \mu_n) \cong \lambda_{\pi}^* \mu_n \otimes \mu_n^{-1} \otimes \mu_n^{-1} \cong \mu_n \otimes \mu_n^{-1} \otimes \mu_n^{-1} \cong \mu_n^{-1}.$$

Poniamo per brevità $F = R^3 i_{\pi*} \mu_n$, e osserviamo che questo fascio è concentrato nei punti di π . Infatti se \bar{x} è un punto geometrico di $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$, si ha

$$(R^3 i_{\pi*} \mu_n)_{\bar{x}} \cong H^3(\text{Spec } \mathcal{O}_{\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2, \bar{x}}^{\text{sh}} \times_{\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2} (\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \setminus \pi), \mu_n).$$

Ma se l'immagine di \bar{x} in $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ non è un punto di π , allora

$$\text{Spec } \mathcal{O}_{\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2, \bar{x}}^{\text{sh}} \times_{\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2} (\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \setminus \pi) \cong \text{Spec } \mathcal{O}_{\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2, \bar{x}}^{\text{sh}},$$

e per la proposizione 5.1.6 i gruppi di coomologia dello spettro di un anello strettamente henseliano sono nulli.

D'altra parte, se $f: U \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ è un aperto, allora

$$(\lambda_{\pi*} \lambda_{\pi}^* F)(U) = \lambda_{\pi}^*(U \times_{\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2} \pi),$$

e notiamo che $U \times_{\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2} \pi$ è l'unione delle fibre di f nei punti di π , per cui $(\lambda_{\pi*} \lambda_{\pi}^* F)(U)$ è non nullo solo se l'immagine di U contiene qualche punto di π . Dunque anche il fascio $\lambda_{\pi*} \lambda_{\pi}^* F$ è concentrato in π . Inoltre se $p \in \pi$, si ha

$$(\lambda_{\pi*} \lambda_{\pi}^* F)_p \cong F_p,$$

e quindi $\lambda_{\pi*} \lambda_{\pi}^* F \cong F$ per il teorema 4.4.6. Abbiamo così mostrato che

$$R^3 i_{\pi*} \mu_n \cong \lambda_{\pi*} \mu_n^{-1} \cong \bigoplus_{p \in \pi} \lambda_{p*} \mu_n^{-1},$$

dove λ_p indica l'inclusione del punto p in $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$.

Consideriamo ancora il diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mu_n & \longrightarrow & \mathbf{G}_m & \xrightarrow{n} & \mathbf{G}_m \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \parallel & & \wr \downarrow \frac{h}{n} \\ 0 & \longrightarrow & \mu_h & \longrightarrow & \mathbf{G}_m & \xrightarrow{h} & \mathbf{G}_m \longrightarrow 0 \end{array}$$

dove le righe sono date dalle successioni di Kummer. Allora applicando il funtore derivato $R^q i_{\pi^*}$ otteniamo un altro diagramma commutativo con righe esatte della forma

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & R^q i_{\pi^*} \mu_n & \longrightarrow & R^q i_{\pi^*} \mathbf{G}_m & \xrightarrow{n} & R^q i_{\pi^*} \mathbf{G}_m \longrightarrow \cdots \\ & & \downarrow & & \parallel & & \downarrow \frac{h}{n} \\ \cdots & \longrightarrow & R^q i_{\pi^*} \mu_h & \longrightarrow & R^q i_{\pi^*} \mathbf{G}_m & \xrightarrow{h} & R^q i_{\pi^*} \mathbf{G}_m \longrightarrow \cdots \end{array}$$

e facendo il limite diretto abbiamo la successione esatta lunga

$$\begin{aligned} \cdots \rightarrow R^{q-1} i_{\pi^*} \mathbf{G}_m \otimes \mathbb{Q}/\mathbb{Z} &\rightarrow \varinjlim_n R^q i_{\pi^*} \mu_n \rightarrow R^q i_{\pi^*} \mathbf{G}_m \\ &\rightarrow R^q i_{\pi^*} \mathbf{G}_m \otimes \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \rightarrow \cdots \end{aligned}$$

Osserviamo che anche i fasci $R^q i_{\pi^*} \mathbf{G}_m$ sono concentrati in π ; inoltre se $p \in \pi$,

$$\begin{aligned} (R^q i_{\pi^*} \mathbf{G}_m)_p &\cong H^q(\text{Spec } \mathcal{O}_{\mathbb{P}_{\mathbb{C}},p}^{\text{sh}} \times_{\mathbb{P}_{\mathbb{C}}} (\mathbb{P}_{\mathbb{C}} \setminus \pi), \mathbf{G}_m) \\ &\cong H^q(\text{Spec } \mathcal{O}_{\mathbb{P}_{\mathbb{C}},p}^{\text{sh}} \setminus \{\mathfrak{m}\}, \mathbf{G}_m), \end{aligned}$$

dove $\mathfrak{m} \subset \mathcal{O}_{\mathbb{P}_{\mathbb{C}},p}^{\text{sh}}$ è l'ideale massimale. Allora applicando il teorema 5.3.5 a $X = \text{Spec } \mathcal{O}_{\mathbb{P}_{\mathbb{C}},p}^{\text{sh}} \setminus \{\mathfrak{m}\}$ si ottiene che i gruppi $H^q(\text{Spec } \mathcal{O}_{\mathbb{P}_{\mathbb{C}},p}^{\text{sh}} \setminus \{\mathfrak{m}\}, \mathbf{G}_m)$ sono di torsione per ogni $q > 0$, e di conseguenza anche i fasci $R^q i_{\pi^*} \mathbf{G}_m$ sono di torsione per $q > 0$. Da questo segue che

$$R^q i_{\pi^*} \mathbf{G}_m \cong \varinjlim_n R^q i_{\pi^*} \mu_n, \quad \text{per ogni } q \geq 1.$$

In particolare per il teorema di purezza $R^q i_{\pi^*} \mathbf{G}_m = 0$ per ogni $q > 0$, $q \neq 3$, e

$$R^3 i_{\pi^*} \mathbf{G}_m \cong \bigoplus_{p \in \pi} \lambda_{p^*} \mu^{-1}. \quad \square$$

PROPOSIZIONE 5.3.8. *Sia π un insieme finito di punti chiusi in $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$, allora*

$$H^2(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2, \mathbf{G}_m) \cong H^2(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \setminus \pi, \mathbf{G}_m),$$

PROPOSIZIONE 5.3.9. *Si ha $H^r(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2, \mathbb{G}_m) \cong H^r(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2, \mu)$, per ogni $r > 2$.*

Dimostrazione. Riprendiamo in considerazione il diagramma commutativo le cui righe sono date dalle successioni di Kummer, allora si hanno delle successioni esatte corrispondenti in coomologia con delle mappe verticali che fanno commutare, e facendo il limite diretto si ottiene

$$\begin{aligned} \cdots \rightarrow H^{r-1}(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2, \mathbb{G}_m) \otimes \mathbb{Q}/\mathbb{Z} &\rightarrow \varinjlim_n H^r(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2, \mu_n) \\ &\rightarrow H^r(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2, \mathbb{G}_m) \otimes \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \rightarrow \cdots \end{aligned}$$

Ma i gruppi $H^r(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2, \mathbb{G}_m) \otimes \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ sono tutti nulli per $r \geq 2$ (teorema 5.3.5), e quindi si ha

$$H^r(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2, \mathbb{G}_m) \cong H^r(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2, \mu), \quad \text{per } r > 2. \quad \square$$

TEOREMA 5.3.10 (Dualità di Poincaré). *Esiste una forma bilineare non degenera*

$$H^r(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2, \mu_n) \times H^{4-r}(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2, \mu_n \otimes \mu_n) \rightarrow H^4(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2, \mu_n \otimes \mu_n) \cong \mu_n.$$

Dimostrazione. Si veda Milne [19, VI.11]. □

Da questo risultato segue subito che

$$H^4(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2, \mu_n) \cong H^4(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2, \mu_n \otimes \mu_n \otimes \mu_n^{-1}) \cong H^4(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2, \mu_n \otimes \mu_n) \otimes \mu_n^{-1} \cong \mu_n^{-1}$$

e quindi per la proposizione 4.6.5 $H^4(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2, \mu) \cong \mu^{-1}$. Inoltre $H^3(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2, \mu)$ è isomorfo al duale di $H^1(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2, \mu) \cong H^1(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$.

PROPOSIZIONE 5.3.11. *Si ha che $H^1(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = 0$.*

Dimostrazione. Dal momento che $\mathbb{Q}/\mathbb{Z} = \varinjlim_n \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ e la coomologia étale commuta con i limiti diretti (proposizione 4.6.5), si ha

$$H^1(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = \varinjlim_n H^1(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}).$$

Inoltre è noto che nel caso di schemi lisci su \mathbb{C} e di fasci costanti definiti da gruppi abeliani finiti, la coomologia étale coincide con la coomologia classica (si veda Grothendieck *et al.* [15, XI.4.4]). In particolare

$$H^1(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = 0,$$

il che conclude la dimostrazione. □

Da quanto visto, applicando la proposizione 5.3.8 alla successione (5.8), ricaviamo

$$(5.9) \quad 0 \rightarrow \bigoplus_{C_\pi} H^1(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \setminus \pi, j_{C_\pi*} \mathbb{Z}) \rightarrow H^2(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2, \mathbb{G}_m) \\ \rightarrow H^2(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \setminus \pi, g_{\pi*} \mathbb{G}_m) \rightarrow \bigoplus_{C_\pi} H^2(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \setminus \pi, j_{C_\pi*} \mathbb{Z}) \\ \rightarrow H^3(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \setminus \pi, \mathbb{G}_m) \rightarrow H^0(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \setminus \pi, R^2 g_{\pi*} \mathbb{G}_m).$$

TEOREMA 5.3.12. *Sia $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ il piano proiettivo complesso. Allora esiste una successione esatta*

$$0 \rightarrow H^2(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2, \mathbb{G}_m) \rightarrow \text{Br } \mathbb{C}(x, y) \rightarrow \bigoplus_C H^1(\text{Spec } K_C, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \\ \rightarrow \bigoplus_p \mu^{-1} \rightarrow \mu^{-1} \rightarrow 0,$$

dove la prima somma è su tutte le curve irriducibili C in $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ e la seconda è sui punti chiusi di $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$.

Dimostrazione. Innanzi tutto osserviamo che facendo il limite dei gruppi $H^r(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \setminus \pi, j_{C_\pi*} \mathbb{Z})$ su tutti gli insiemi finiti π di punti chiusi di $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$, otteniamo i gruppi $H^r(\text{Spec } K_C, \mathbb{Z})$, dove C è la curva irriducibile contenuta in $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ tale che $C \cap (\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \setminus \pi) = C_\pi$. Allora la successione esatta descritta si ottiene a partire dalla successione (5.9) passando al limite sugli insiemi π e tenendo conto delle proposizioni 5.3.4 e 5.3.8. \square

È possibile dare un'interpretazione delle mappe coinvolte nella successione esatta del teorema come segue (per le dimostrazioni si veda Artin e Mumford [4]).

Ricordiamo che uno schema è normale se tutti i suoi anelli locali sono integralmente chiusi. Inoltre per ogni schema integro X esistono uno schema normale \bar{X} e un morfismo $\nu: \bar{X} \rightarrow X$ tali che per ogni morfismo $\psi: Y \rightarrow X$ con Y normale, esiste un unico morfismo $\psi': Y \rightarrow \bar{X}$ tale che $\nu \circ \psi' = \psi$ (Hartshorne [16, II.3]). Lo schema \bar{X} è detto la *normalizzazione* di X .

Innanzitutto la mappa $s: \bigoplus_p \mu^{-1} \rightarrow \mu^{-1}$ si può interpretare come la somma.

Per descrivere la mappa $r: \bigoplus_C H^1(\text{Spec } K_C, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \rightarrow \bigoplus_p \mu^{-1}$, fissiamo una curva irriducibile C in $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ e indichiamo con \bar{C} la sua normalizzazione e con $\nu: \bar{C} \rightarrow C$ il relativo morfismo. Sia poi $\text{Spec } K_{\bar{C}}$ il punto generico di \bar{C} e consideriamo la successione di Kummer (proposizione 4.5.3)

$$0 \rightarrow \mu_n \rightarrow \mathbb{G}_m \xrightarrow{n} \mathbb{G}_m \rightarrow 0.$$

Dai primi termini della successione esatta lunga in coomologia si ha

$$K_{\bar{C}}^* \xrightarrow{n} K_{\bar{C}}^* \rightarrow H^1(\text{Spec } K_{\bar{C}}, \mu_n) \rightarrow H^1(\text{Spec } K_{\bar{C}}, \mathbb{G}_m).$$

D'altra parte per il teorema 4.6.11 si ha che

$$H^1(\text{Spec } K_{\bar{C}}, \mathbb{G}_m) = \text{Pic}(K_{\bar{C}}) = 0,$$

per cui $H^1(\text{Spec } K_{\bar{C}}, \mu_n) \cong K_{\bar{C}}^*/(K_{\bar{C}}^*)^n$.

Per ogni punto $\bar{p} \in \bar{C}$, denotiamo con $v_{\bar{p}}: K_{\bar{C}}^* \rightarrow \mathbb{Z}$ la valutazione indotta da $\mathcal{O}_{\bar{C}, \bar{p}}$. Otteniamo quindi un omomorfismo

$$H^1(\text{Spec } K_{\bar{C}}, \mu_n) \cong K_{\bar{C}}^*/(K_{\bar{C}}^*)^n \rightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z},$$

e tensorizzando per μ_n^{-1} , dal momento che $\mu_n \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, abbiamo $H^1(\text{Spec } K_{\bar{C}}, \mu_n) \rightarrow \mu_n^{-1}$. Infine prendendo il limite su $n \in \mathbb{N}$, si ricava un omomorfismo

$$\sigma_{\bar{p}}: H^1(\text{Spec } K_{\bar{C}}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \rightarrow \mu^{-1}.$$

Sia ora $p \in C$ un punto e poniamo $v^{-1}(p) = \{\bar{p}_1, \dots, \bar{p}_r\}$, allora la mappa

$$r: H^1(\text{Spec } K_C, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \rightarrow \mu^{-1}$$

è data da $r = \sum_{i=1}^r \sigma_{\bar{p}_i}$.

BIBLIOGRAFIA

- [1] ALBERT, A. A. (1939), *Structure of Algebras*, American Mathematical Society Colloquium Publications, vol. 24, American Mathematical Society, New York.
- [2] ARTIN, E. e TATE, J. (1968), *Class field theory*, W. A. Benjamin, Inc., New York-Amsterdam.
- [3] ARTIN, M. (1962), «Grothendieck topologies», *Harvard University Math. Dept.*
- [4] ARTIN, M. e MUMFORD, D. (1972), «Some elementary examples of unirational varieties which are not rational», *Proc. London Math. Soc.*, Vol. 3 (25).
- [5] ATIYAH, M. F. e MACDONALD, I. G. (1969), *Introduction to commutative algebra*, Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass.-London-Don Mills, Ont.
- [6] AX, J. (1965), «A field of cohomological dimension 1 which is not C_1 », *Bull. Amer. Math. Soc.*, Vol. 71, p. 717.
- [7] BUCUR, I. e DELEANU, A. (1968), *Introduction to the theory of categories and functors*, Pure and Applied Mathematics, Vol. XIX, Interscience Publication John Wiley & Sons, Ltd., London-New York-Sydney.
- [8] CORNELL, G. e SILVERMAN, J. H. (1986), *Arithmetic geometry*, Springer-Verlag.
- [9] DELIGNE, P., GROTHENDIECK, A. e VERDIER, J. L. (1977), *Séminaire de géométrie algébrique: cohomologie étale*, Springer-Heidelberg.
- [10] DEURING, M. (1935), *Algebren*, Springer-Verlag, Berlin.
- [11] DRAXL, P. K. (1983), *Skew fields*, Vol. 81 di *London Mathematical Society Lecture Note Series*, Cambridge University Press, Cambridge.
- [12] EISENBUD, D. (1995), *Commutative algebra*, Vol. 150 di *Graduate Texts in Mathematics*, Springer-Verlag, New York, with a view toward algebraic geometry.
- [13] FREITAG, E. e KIEHL, R. (1988), *Étale cohomology and the Weil conjecture*, Vol. 13 di *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3)*, Springer-Verlag, Berlin.

- [14] GROTHENDIECK, A. (1968), «Le groupe de Brauer», in «Dix Exposés sur la Cohomologie des Schémas», p. 46–188, North-Holland, Amsterdam.
- [15] GROTHENDIECK, A., ARTIN, M. e VERDIER, J. L. (1972-73), *Séminaire de géométrie algébrique: théorie des topos et cohomologie étale des schémas*, Springer-Heidelberg.
- [16] HARTSHORNE, R. (1977), *Algebraic geometry*, Springer-Verlag, New York, graduate Texts in Mathematics, No. 52.
- [17] LANG, S. (1952), «On quasi algebraic closure», *Ann. of Math. (2)*, Vol. 55, p. 373–390.
- [18] MATSUMURA, H. (1980), *Commutative algebra*, Vol. 56 di *Mathematics Lecture Note Series*, Benjamin/Cummings Publishing Co., Inc., Reading, Mass., second ed.
- [19] MILNE, J. S. (1980), *Étale cohomology*, Vol. 33 di *Princeton Mathematical Series*, Princeton University Press, Princeton, N.J.
- [20] MUMFORD, D. (1970), *Abelian varieties*, Tata Institute of Fundamental Research Studies in Mathematics, No. 5, Oxford University Press.
- [21] RAYNAUD, M. (1970), *Anneaux locaux henséliens*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 169, Springer-Verlag, Berlin.
- [22] SERRE, J.-P. (1962), *Corps locaux*, Publications de l'Institut de Mathématique de l'Université de Nancago, VIII, Actualités Sci. Indust., No. 1296. Hermann, Paris.
- [23] SERRE, J.-P. (1965), *Cohomologie galoisienne*, Vol. 1965 di *Lecture Notes in Mathematics*, No. 5, Springer-Verlag, Berlin.
- [24] SHATZ, S. S. (1972), *Profinite groups, arithmetic, and geometry*, Princeton University Press, Princeton, N.J., *annals of Mathematics Studies*, No. 67.